

【ワンポイント解説】

変圧器に採用される保護リレーに関する問題です。

3 種でも出題頻度は少ないですが、油入変圧器の保護継電器に関する内容が出題されたことがあるかと思います。2 種以上になると、動作の概要や誤動作防止対策等の知識も必要となってくるので、ここで理解しておきましょう。

1. 変圧器に用いられる保護継電器

変圧器内部で発生する事故には、巻線間短絡事故、巻線と鉄心間の地絡事故、高圧巻線と低圧巻線の混触事故、巻線の断線事故、等があり以下の電氣的、機械的及び熱的保護装置により検出されます。

①電氣的保護装置

変圧器で最も多いのは巻線間短絡事故ですが、一般の過電流リレーや地絡リレーでの検出が困難なため、図 1 に示すような比率差動継電器が用いられます。

比率差動継電器は、変圧器の一次側と二次側電流を CT を介して検出し、一次側と二次側の差が分かるようにする継電器で、通常時は図 1(a)のように動作コイルに流れる電流がほぼ零となるように整定され、異常発生時は図 1(b)のように動作コイルに流れる電流が零でなくなります。しかし、一次側と二次側 CT の違いや誤差等により、厳密に動作コイルに流れる電流を零とすることができないため、抑制コイルを設けています。また、抑制コイルには外部事故が発生した際等の誤動作防止の役割もあります。

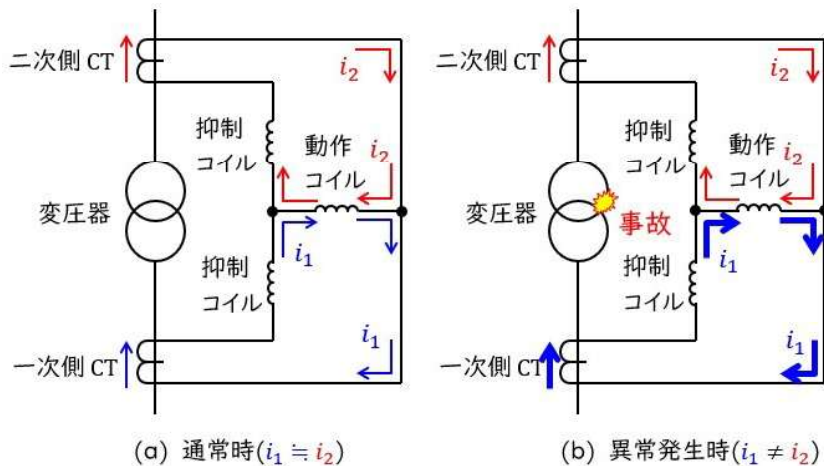


図 1

②機械的保護装置

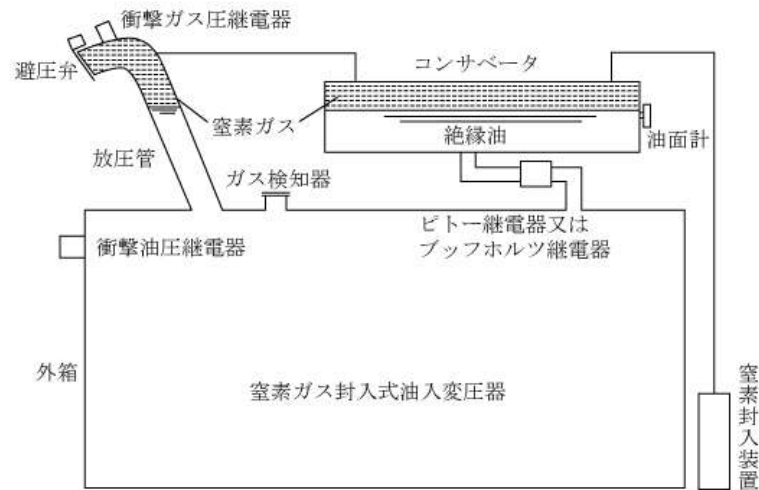
事故発生時には、変圧器内部の油圧変化、ガス圧変化、油流変化等が起こります。代表的な保護装置には以下の継電器があります。また、変圧器内の圧力上昇を抑制するために放圧装置というものも変圧器上部に設けられています。

・衝撃圧力継電器

タンク内の側壁に取り付けられ、事故時に発生する分解ガスによる内部の圧力上昇を検出します。

・ブッフホルツ継電器

タンク内とコンサーバタを結ぶ連結部に用いられ、ガスが徐々に溜まりマイクロスイッチを叩くと動作します。地震等の振動で誤動作しやすいので、信頼度もあまり高くなく警報回路のみに使用されることが多いです。



出典：公益財団法人 日本電気技術者協会 電気技術解説講座 特別高圧用変圧器の機械的保護継電器
URL： <https://jeea.or.jp/course/contents/08204/>

③熱的保護・監視装置

変圧器に使用する絶縁油の油温度や巻線温度の上昇を検出するために、ダイヤル温度計や巻線温度指示装置が設けられています。
もちろん通常運転時にも油温度や巻線温度は上昇するため、異常に温度が上昇したときのみ警報が発信されるようになっています。

2.励磁突入電流

変圧器を遮断器投入によって電路に接続すると、投入時の電圧の位相によっては定格電流の数倍から十数倍の大きな励磁電流が流れることがあり、これを励磁突入電流といいます。
ファラデーの電磁誘導の法則より、電圧 e [V] と磁束 ϕ [Wb] には、

$$\begin{aligned} e &= -N \frac{d\phi}{dt} \\ Nd\phi &= -ed t \\ N \int d\phi &= - \int ed t \\ N\phi &= - \int ed t \end{aligned}$$

という積分の関係があるため、仮に正弦波の電圧が加わっている状態で図 2 の+から-に切り替わる 0 [V] 付近で投入された場合には、最大で 2 倍程度の磁束が発生し、残留磁束の影響でさらに磁束が大きくなると鉄心の飽和磁束密度を超えて大きな励磁電流が流れる可能性があります。
したがって、励磁突入電流の対策としては励磁磁束と残留磁束の合計値を小さくすれば良いので、残留磁束の消去や投入位相の制御等が有効となります。
また、励磁突入電流の特徴として、

- ・ 第二調波成分を多く含む。
 - ・ 残留磁束と同極性の電圧が位相差がなく印加された時最大となる。
 - ・ 励磁突入電流の大きさは最大で定格の 10 倍以上となることがある。
 - ・ 励磁突入電流の継続時間は小容量で数秒程度、大容量では 10 秒以上にもなる。
- 等があるので、比率差動継電器においても、
- ・ 変圧器投入後一定時間継電器をロックする方法
 - ・ 第二調波抑制付比率差動電器を用いる方法
- 等の対策がとられます。

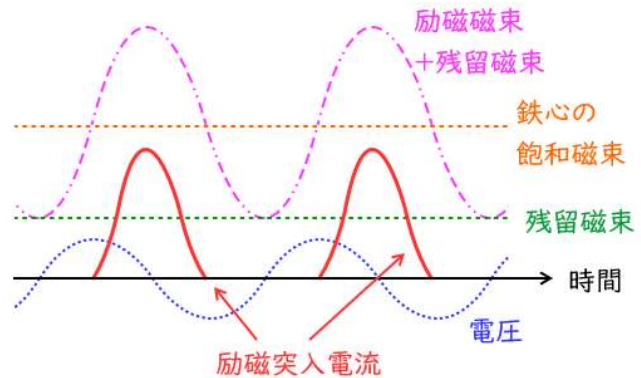
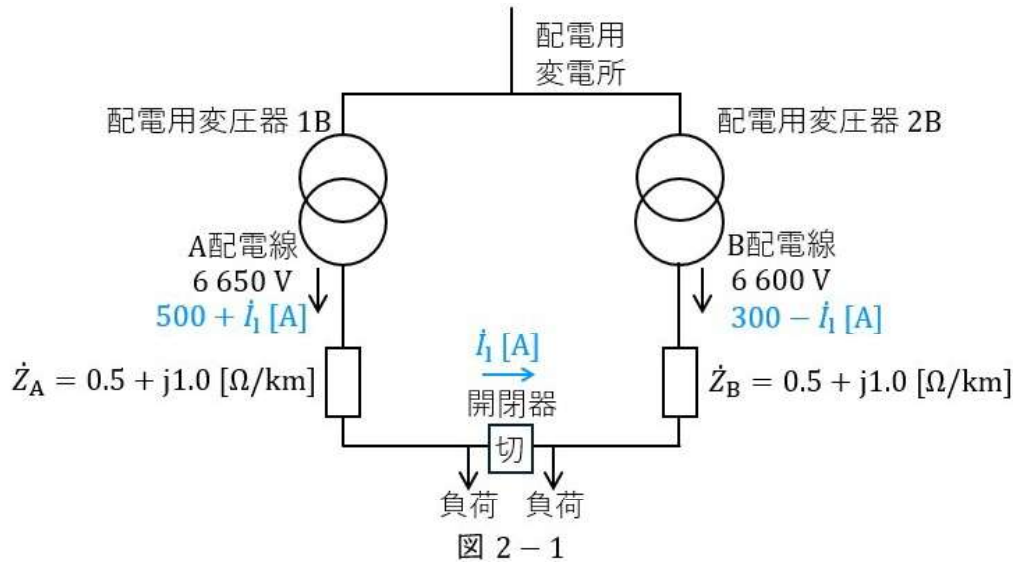


図 2



(3) 図 3 の系統における開閉器投入後の三相短絡電流

配電線の百分率インピーダンス $\%Z_A = \%Z_B = \%Z$ [%] は、長さが 1 km であるから、ワンポイント解説「2. オーム法から百分率インピーダンス法への変換」の通り、

$$\%Z = \frac{P_n Z}{V_n^2} \times 100 = \frac{10 \times 10^6 \times 0.5}{6600^2} \times 100 \cong 11.478 \text{ [%]}$$

となるので、短絡点からみた百分率インピーダンス $\%Z_s$ [%] は、

$$\begin{aligned} \%Z_s &= \%Z_G + \frac{(\%Z_{T1} + \%Z_A)(\%Z_{T2} + \%Z_B)}{(\%Z_{T1} + \%Z_A) + (\%Z_{T2} + \%Z_B)} \\ &= \%Z_G + \frac{(\%Z_T + \%Z)(\%Z_T + \%Z)}{2(\%Z_T + \%Z)} \\ &= \%Z_G + \frac{\%Z_T + \%Z}{2} \\ &= 1 + \frac{7.5 + 11.478}{2} \\ &= 10.489 \text{ [%]} \end{aligned}$$

となる。また、基準電流 I_n [A] は、

$$I_n = \frac{P_n}{\sqrt{3}V_n} = \frac{10 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 6600} \cong 874.77 \text{ [A]}$$

なので、三相短絡電流 I_s [A] は、ワンポイント解説「3. 百分率インピーダンスの短絡電流計算」の通り、

$$I_s = \frac{100I_n}{\%Z_s} = \frac{100 \times 874.77}{10.489} \cong 8339.9 \rightarrow 8340 \text{ [A]}$$

と求められる。

【正答チェック表】

日にち	(1)	(2)	(3)	(4)

【ワンポイント解説】

同期発電機の過渡安定度の検討に関する問題です。
(3)までは比較的解きやすい問題ですが、(4)の計算は途中の近似式を工夫する等高い数学能力が求められる問題です。合格のためには(4)は本番で解かず
に他の問題を優先しても良いかと思います。

1.同期発電機の出力

同期発電機の内部誘導起電力が E [V]，端子電圧が V [V]，1相あたりの同期リアクタンスが X [Ω]（抵抗分は無視できるものとします），電機子電流が I [A] であるとする、回路図は図 4、ベクトル図は図 5 のように描くことができます。ただし、 δ [rad] は内部誘導起電力と端子電圧の相差角、 θ [rad] は力率角です。

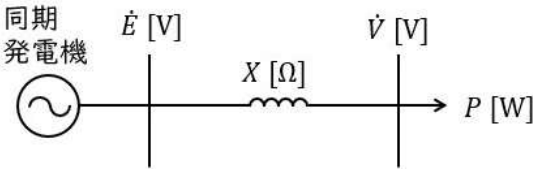


図 4

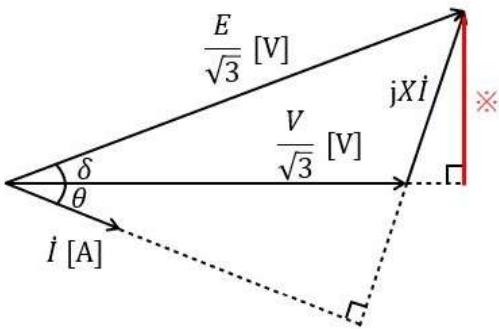


図 5

このとき、発電機の出力 P [W] は、

$$P = \sqrt{3}VI \cos \theta$$

で求めることができ、図 5 の※線を求める式より、

$$XI \cos \theta = \frac{E}{\sqrt{3}} \sin \delta$$

$$I \cos \theta = \frac{E}{\sqrt{3}X} \sin \delta$$

となるので、

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3}VI \cos \theta \\ &= \sqrt{3}V \cdot \frac{E}{\sqrt{3}X} \sin \delta \\ &= \frac{EV}{X} \sin \delta \end{aligned}$$

となります。上式は $P = \sqrt{3}VI \cos \theta$ と合わせて公式として覚えておきましょう。

2.同期化力

同期発電機の同期外れの起こりにくさを表すもので、出力 P [W] を相差角 δ [rad] で微分した $\frac{dP}{d\delta}$ で求められます。したがって、

$$\frac{dP}{d\delta} = \frac{EV}{X} \cos \delta$$

となり、 $\frac{dP}{d\delta} > 0$ のとき安定、 $\frac{dP}{d\delta} < 0$ のとき不安定、すなわち $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ のとき安定、 $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$ のとき不安定となります。

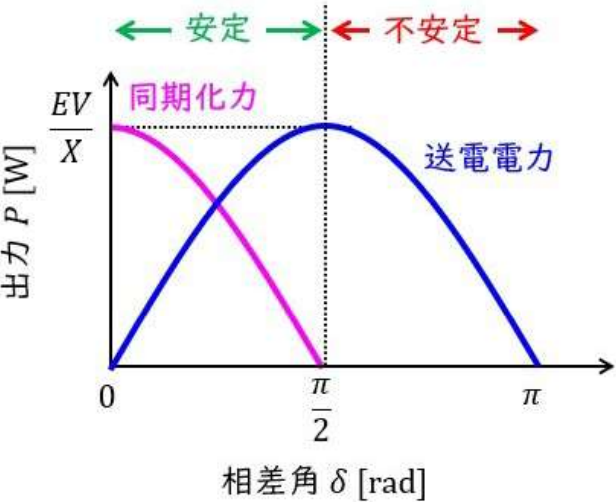


図 6

3.等面積法

過渡安定度のメカニズムの説明には、出力 P [W] と相差角 δ [rad] の関係 ($P = \frac{EV}{X} \sin \delta$) を表す図 7 のような $P - \delta$ 曲線による等面積法が用いられます。
図 7 の a で安定運転していた発電機に事故が発生

令和 4 年 問 6

問題 【難易度】★★☆☆☆（やや易しい）

ある変電所から、配電線 A，B により，下表に示す需要設備 a，b，c に電力を供給しているとき，次の問に答えよ。配電線は A，B 以外にはないものとし，需要設備 a，b，c の力率は全て 90 %（遅れ一定）とする。

- (1) 需要設備 a，b，c の最大電力 [kW] をそれぞれ求めよ。
- (2) 変電所の総合最大電力 [kW] を求めよ。
- (3) 需要設備 a，b，c の平均電力 [kW] をそれぞれ求めよ。
- (4) 変電所の総合負荷率 [%] を求めよ。

配電線	需要設備	設備容量 [kV・A]	需要率	負荷率 [%]	需要設備間 の不等率	配電線間 の不等率
A	a	9 000	0.6	70	—	1.1
B	b	5 000	0.7	80	1.25	
	c	3 000	0.8	60		

【正答チェック表】

日にち	(1)	(2)	(3)	(4)

【解答】

(1)煤じん**(ポイント)**

- ・内容はワンポイント解説「1.火力発電所で発生する大気汚染物質」の通りです。
- ・100字程度なので、「燃料中に含まれる灰分が原因」、「電気集塵機」、「静電気」等の用語をキーワードとして取り入れると良いかと思います。

(試験センター解答)

発生原因：

燃料に含まれる灰分が燃焼することで生成される
対策装置(設備)：
電気集じん機(煤じん除去装置)を使用する

原理：

(電気集じん機)

煤じんを帯電させて静電気力により排ガスより分離捕集を行う

(2)硫黄酸化物(SO_x)**(ポイント)**

- ・内容はワンポイント解説「1.火力発電所で発生する大気汚染物質」の通りです。
- ・こちらも100字程度なので、「燃料中に含まれる硫黄分が酸素と反応」、「脱硫装置」、「石灰石(もしくは水酸化マグネシウム)をスラリー状にして反応」、「石灰石膏法(もしくは水酸化マグネシウム法)」等の用語をキーワードとして取り入れると良いかと思います。

(試験センター解答例)

発生原因：

燃料中に含まれる硫黄分が燃焼することで生成される

対策装置(設備)：

脱硫装置を使用する

原理：

(脱硫装置)

石灰石—石膏法にて排ガス中の亜硫酸ガスを石灰(石灰スラリー)に吸収させ亜硫酸カルシウムとして除去する。これを空気で酸化することで石膏が生成される

(3)窒素酸化物(NO_x)**(ポイント)**

- ・内容はワンポイント解説「1.火力発電所で発生する大気汚染物質」の通りです。
- ・窒素酸化物も同様に100字程度なので、「燃料や空気中に含まれる窒素分が高温燃焼を伴い酸素と反応」、「脱硝装置(他の方法も可)」、「アンモニアを触媒反応させて窒素と水に分解」等の用語を入れると良いかと思います。

(試験センター解答例)

以下の発生原因の中から一つ、対策装置(設備)の中から一つ及びその原理が記載されていればよい。

発生原因：

燃焼空気中の窒素が高温条件下で酸素と反応して生成される

燃料中に含まれる窒素分が燃焼により酸化され生成される

対策装置(設備)：

低NO_xバーナー、排ガス混合法、ボイラ二段燃焼、脱硝装置を使用する

原理：

(低NO_xバーナー)

燃焼方法(燃焼温度低下)の改善により生成量を減らす

(排ガス混合法)

ガス混合機により排ガスを燃焼空気に混合して低酸素燃焼を行う

(ボイラ二段燃焼)

バーナー周りの空気比を下げNO_xの生成を抑制させ未燃分を後流から注入した空気中で再燃焼させる

(脱硝装置)

アンモニア接触還元法にて還元剤としてアンモニアを加え混合したのち触媒層に通すことでNO_xとアンモニアが還元反応して窒素と水蒸気に分解される

【ワンポイント解説】

水車の比速度及び回転速度に関する問題です。回転速度はできるだけ高くした方が設備費用等も抑えることが可能となりますが、機械的な制約のため本問のように回転速度の上限値があります。

二次試験合格に向けては、特別難解な公式もなく比速度や回転速度の公式も与えられているので、できれば完答しておきたい問題となります。

1.同期発電機の回転速度 N

同期発電機は系統と並列運転するために同期速度で運転する必要があります。発電機の極数が p ，系統の周波数が f [Hz] の時，同期発電機の回転速度 N [min^{-1}] は、

$$N = \frac{120f}{p}$$

となります。

【解答】

(1)適用できる比速度と有効落差の関係に基づき算出される回転速度の上限値

適用できる比速度と有効落差の関係の式より、有効落差 $H = 162$ [m] であるから、

$$\begin{aligned} n_s &\leq \frac{23000}{H + 30} + 40 \\ &= \frac{23000}{162 + 30} + 40 \\ &\approx 159.79 [\text{min}^{-1}] \end{aligned}$$

であるから、比速度 n_s と回転速度 N の関係式を整理して回転速度の上限値 N_m を求めると、

$$\begin{aligned} n_s &= \frac{N_m \times P^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{5}{4}}} \\ N_m &= \frac{n_s \times H^{\frac{5}{4}}}{P^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{159.79 \times 162^{\frac{5}{4}}}{(40 \times 10^3)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{159.79 \times (\sqrt{\sqrt{162}})^5}{\sqrt{40 \times 10^3}} \\ &= \frac{159.79 \times 577.95}{200} \\ &\approx 461.75 [\text{min}^{-1}] \end{aligned}$$

となるので、上限値は繰り下げして 461 min^{-1} と求められる。

(2)選定すべき定格回転速度とその理由

ワンポイント解説「1.同期発電機の回転速度 N 」より、回転速度上限値 N_m の時の発電機の極数 p は、

$$\begin{aligned} N_m &= \frac{120f}{p} \\ p &= \frac{120f}{N_m} \\ &= \frac{120 \times 60}{461.75} \\ &\approx 15.593 \end{aligned}$$

となる。発電機の極数 p は、1 極対が 2 なので、2 の倍数が 15.593 より大きくなるとき、回転速度が上限値より低くなる。また、設計上回転速度はできるだけ大きい方が望ましいので、極数は 16 となる。

❗ 例えば p の計算結果が 14.593 だったとして、15 として下記の計算をしないように気を付けて下さい。

したがって、このときの回転速度が定格回転速度 N_n となりその大きさは、

$$\begin{aligned} N_n &= \frac{120f}{p} \\ &= \frac{120 \times 60}{16} \\ &= 450 [\text{min}^{-1}] \end{aligned}$$

と求められる。

【選定理由（試験センター解答）】

フランス水車の比速度としては、180 程度で最も高い効率が得られること、また、水車及び発電機は高速化することでの小型化によるコスト低減が図れることから、できるだけ適用限界の回転速度に近い定格回転速度を選定することが望ましい。

(3)小問(2)の場合の発電機の極数

(2)の通り、定格回転速度 $N_n = 450 [\text{min}^{-1}]$ のとき、極数は $p = 16$ と求められる。

零相電流 $\dot{I}_0$ 、正相電流 $\dot{I}_1$ 、逆相電流 $\dot{I}_2$ とすると、各相の電流 $\dot{I}_a$ 、 $\dot{I}_b$ 、 $\dot{I}_c$ は電圧同様に以下のように表せます。

$$\begin{aligned}\dot{I}_a &= \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ \dot{I}_b &= \dot{I}_0 + a^2\dot{I}_1 + a\dot{I}_2 \\ \dot{I}_c &= \dot{I}_0 + a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2\end{aligned}$$

また、対称座標法における発電機の基本式は以下の通りとなります。

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &= -Z_0\dot{I}_0 \\ \dot{V}_1 &= \dot{E}_a - Z_1\dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 &= -Z_2\dot{I}_2\end{aligned}$$

これらの式を利用して、地絡電流の大きさを求めます。

3.対称座標法による1線地絡故障時の等価回路

対称座標法を利用した1線地絡故障時の等価回路は図1のようになります。ただし、 R_g は地絡抵抗となります。発電機の基本式と照らし合わせて覚えましょう。

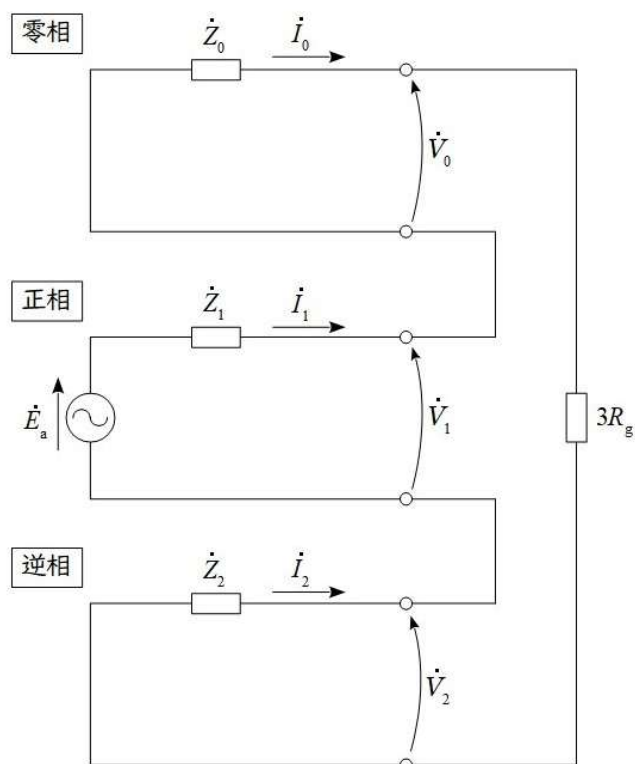


図1

【解答】

(1)地絡電流 $\dot{I}_g$ を各値を用いて表す

本問における1線地絡故障時の等価回路を図2に示す。

図2より、

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2$$

であるから、回路方程式より $\dot{I}_0$ を求めると、

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 &= 3R_f\dot{I}_0 \\ -Z_0\dot{I}_0 + \dot{E}_a - Z_1\dot{I}_1 - Z_2\dot{I}_2 &= 3R_f\dot{I}_0 \\ -Z_0\dot{I}_0 + \dot{E}_a - Z_1\dot{I}_0 - Z_2\dot{I}_0 &= 3R_f\dot{I}_0 \\ \dot{E}_a - (Z_0 + Z_1 + Z_2)\dot{I}_0 &= 3R_f\dot{I}_0 \\ (Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3R_f)\dot{I}_0 &= \dot{E}_a\end{aligned}$$

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{E}_a}{Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3R_f}$$

となる。ここで、問題図より、 $\dot{I}_g = \dot{I}_a$ であり、ワンポイント解説「2.対称座標法」より、

$$\begin{aligned}\dot{I}_a &= \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ &= 3\dot{I}_0\end{aligned}$$

であるから、地絡電流 $\dot{I}_g$ は、

$$\begin{aligned}\dot{I}_g &= 3\dot{I}_0 \\ &= \frac{3\dot{E}_a}{Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3R_f}\end{aligned}$$

と求められる。

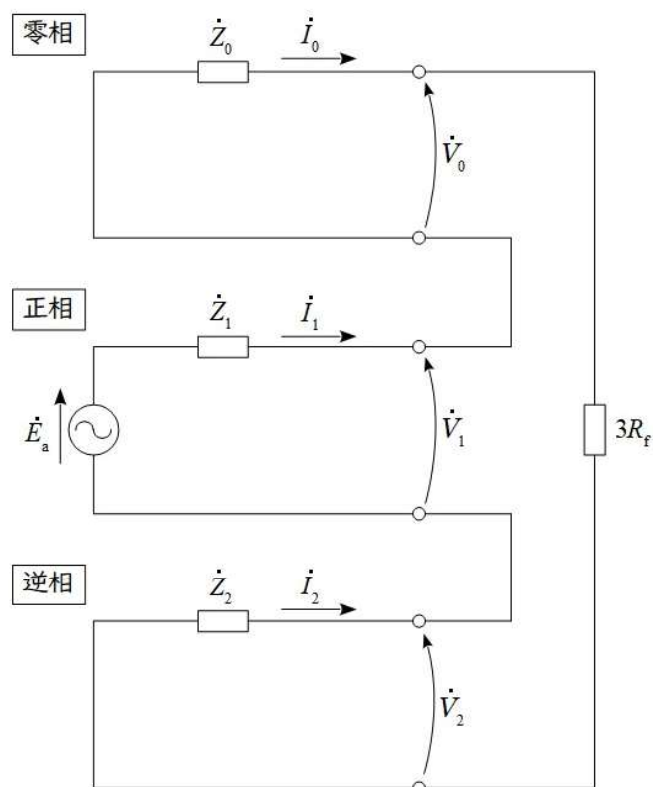


図2

(2)b) 不平等負荷分布における A' 点から x' [m] だけ離れた地点の負荷電流密度 i'_x [A/m] 及び線路電流 I'_x [A] と低圧配電線の全区間の電力損失

a) の線路電流 I_x の導出式と同様に、A' 点から x' 離れた地点の負荷電流密度 i'_x は、

$$i'_x = i'_0 \cdot \frac{L - x'}{L}$$

と求められる。 x' 離れた地点の線路電流 I'_x は、 x' から L までの負荷電流密度を合算したものであるから、

$$\begin{aligned} I'_x &= \int_{x'}^L i'_x dx' = \int_{x'}^L i'_0 \cdot \frac{L - x'}{L} dx' = \frac{i'_0}{L} \int_{x'}^L (L - x') dx' \\ &= \frac{i'_0}{L} \left[Lx' - \frac{x'^2}{2} \right]_{x'}^L = \frac{i'_0}{L} \left[L^2 - \frac{L^2}{2} - Lx' + \frac{x'^2}{2} \right] \\ &= \frac{i'_0}{2L} [L^2 - 2Lx' + x'^2] = \frac{i'_0}{2L} (L - x')^2 \end{aligned}$$

と求められる。よって、a) と同様に微小区間 dx' における電力損失 dP'_1 は、微小区間の抵抗が rdx' であるので、

$$\begin{aligned} dP'_1 &= 2I'^2_x r dx' \\ &= 2 \left\{ \frac{i'_0}{2L} (L - x')^2 \right\}^2 r dx' \\ &= \frac{i'^2_0 r}{2L^2} (L - x')^4 dx' \end{aligned}$$

となる。したがって、線路全体の電力損失 P'_1 は上式

の両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} P'_1 &= \int_0^L \frac{i'^2_0 r}{2L^2} (L - x')^4 dx' \\ &= \frac{i'^2_0 r}{2L^2} \int_0^L (L - x')^4 dx' \end{aligned}$$

となる。ここで、 $X = L - x'$ とすれば x' が 0 から L に変化するとき、 X が L から 0 に変化し、 $dX = -dx'$ であるので、

$$\begin{aligned} P'_1 &= \int_0^L \frac{i'^2_0 r}{2L^2} (L - x')^4 dx' = \frac{i'^2_0 r}{2L^2} \int_L^0 X^4 \cdot (-1) \cdot dX \\ &= -\frac{i'^2_0 r}{2L^2} \int_L^0 X^4 dX = -\frac{i'^2_0 r}{2L^2} \left[\frac{X^5}{5} \right]_L^0 \\ &= -\frac{i'^2_0 r}{2L^2} \left[-\frac{L^5}{5} \right] = \frac{i'^2_0 L^3 r}{10} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} I_s &= I'_x(0) \\ &= \frac{i'_0 L}{2} \end{aligned}$$

であるので、

$$P'_1 = \frac{2I_s^2 L r}{5}$$

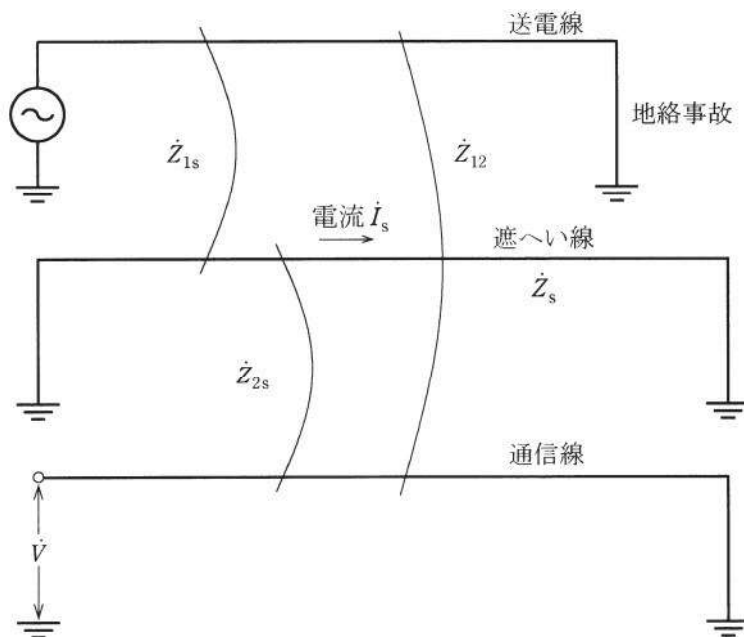
と求められる。

平成 24 年 問 3

問題 【難易度】★★★★☆（やや難しい）

図のように三相交流送電線（単線結線図）と通信線があり、その間に遮へい線がある。送電線と通信線の相互インピーダンスを $\dot{Z}_{12}$ ，送電線と遮へい線との相互インピーダンスを $\dot{Z}_{1s}$ ，遮へい線と通信線の相互インピーダンスを $\dot{Z}_{2s}$ ，遮へい線の自己インピーダンスを $\dot{Z}_s$ とする。一線地絡事故により送電線に流れる零相電流を $\dot{I}_0$ とするとき次の問に答えよ。

- (1) 遮へい線が無い場合に、通信線の開放端に生じる誘導電圧 $\dot{V}$ を求めよ。
- (2) 遮へい線が存在する場合に、遮へい線に流れる電流 $\dot{I}_s$ と通信線の開放端に生じる誘導電圧 $\dot{V}'$ を求めよ。
- (3) (2)の計算結果を用いて、遮へい線をどのように配置するのが良いか説明せよ。



【正答チェック表】

日にち	(1)	(2)	(3)

【ワンポイント解説】

送電線から通信線への電磁誘導障害に関する問題です。

知識として遮へい線を設けることや遮へい線を通信線寄りにした方が良いということを知っている人も多いかもしれませんが、二次試験になるとさらに「なぜ」遮へい線が効果があるのかを学習することが必要になります。

メカニズムを理解するには非常に良い問題であると思いますので、確実に理解するようにしましょう。

1.電磁誘導障害

送電線と通信線との相互インダクタンスと送電線に流れる各電流の電磁誘導により誘導電圧が発生します。

定量的には、図 1 のように各電流と相互インダクタンス M [H/m] と並行区間長 L [m] を定めると、通信線に発生する電圧 $\dot{V}_0$ [V] は、

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &= j\omega ML\dot{I}_a + j\omega ML\dot{I}_b + j\omega ML\dot{I}_c \\ &= j\omega ML(\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c)\end{aligned}$$

となります。通常運転時、 $\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c \equiv 0$ であるので、 $\dot{V}_0 \equiv 0$ となりますが、事故等で三相不平衡状態になると電磁誘導障害が発生することになります。

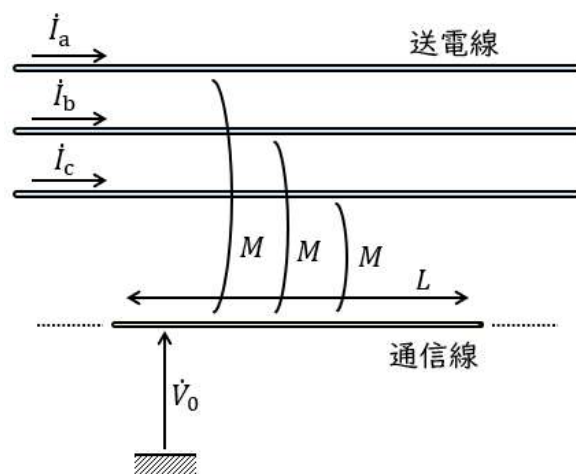


図 1

2.ベクトルオペレータ a

ベクトルオペレータとは、 $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ で定義される演算子であり、

$$a = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3 = \cos \frac{6\pi}{3} + j \sin \frac{6\pi}{3} = 1$$

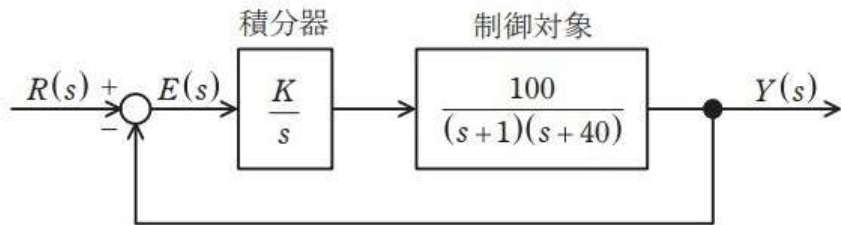
という関係があります。

令和 4 年 問 4

問題 【難易度】★★★★☆☆（普通）

図に示すフィードバック制御系について、次の問に答えよ。ただし、 $R(s)$ は目標値、 $Y(s)$ は制御量、 $E(s)$ は制御偏差であり、時間信号 $r(t)$ 、 $y(t)$ 、 $e(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである。

- (1) フィードバック制御系の特性方程式を求めよ。
- (2) フィードバック制御系を安定とする K の条件を求めよ。
- (3) 目標値 $R(s)$ から制御偏差 $E(s)$ までの伝達関数 $T_{ER}(s)$ を求めよ。
- (4) $K = 2$ とおく。目標値 $r(t)$ を傾き 2 でランプ変化させたときの定常速度偏差 e_v を求めよ。
- (5) $K = 2$ とおく。正弦関数 $2 \sin t$ で表される目標値 $r(t)$ に対し、定常状態での制御偏差 $e(t)$ は $B \sin(t + \theta)$ で表される正弦関数となった。 B の値を求めよ。



【正答チェック表】

日にち	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

【ワンポイント解説】

フィードバック制御系の伝達関数から定常状態を検討する計算問題です。

考え方はそれほど難しくはありませんが、計算量が非常に多く 30 分で完答するには少し時間が足りない問題であった印象です。

(4)までは過去問でも頻出の内容となっていますので、部分点狙い（合格点狙い）としては選択しても良い問題かと思います。

1.基本的なラプラス変換

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると次のような関係があります。

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
K	$\frac{K}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

2.ラウスの安定判別法

特性方程式

$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$
が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列
1 行	a_0	a_2	$a_4 \dots$
2 行	a_1	a_3	$a_5 \dots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$\dots$
4 行	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	

3.定常偏差(最終値の定理)

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると、 $f(t)$ の定常値は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

で求められます。

【ワンポイント解説】

フィードバック制御系の安定判別に関する問題です。伝達関数を求めてから安定判別をする典型的な問題です。自動制御の問題は比較的パターン化されており、本問のように過去問の類題から出題されることも多いので、よく過去問を習熟するようにしましょう。

1.基本的なラプラス変換

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると次の表のような関係があります。

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ 単位インパルス関数	1
$u(t)$ 単位ステップ関数	$\frac{1}{s}$
K	$\frac{K}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

②

単位インパルス関数は、 $\delta(t) - t$ の面積が 1 となるような大きさのピークが $t = 0$ に発生する理想的な関数です。これは、自動制御において、瞬発的な入力を注入したときの出力の反応（応答）を観察するための関数となります。
この応答をインパルス応答といいます。「インパルス (impulse)」とは「衝動」という意味です。

2.減衰係数 ζ と固有角振動数 ω_n

2 次遅れの伝達関数 $W(s)$ の一般式は、減衰係数 ζ 、固有振動数 ω_n とすると、

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

で表されます。
このとき ζ において、
 $0 \leq \zeta < 1$ のとき : 応答が振動的となる
 $\zeta = 1$ のとき : 応答が振動しない限界
 $\zeta > 1$ のとき : 応答が振動しない
となります。

3.ラウスの安定判別法

特性方程式

$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$
が与えられているとき、ラウスの数表は次表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列
1 行	a_0	a_2	$a_4 \dots$
2 行	a_1	a_3	$a_5 \dots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$\dots$
4 行	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	

【解答】

(1)開ループ伝達関数 $G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$

図 1 に示すように操作量 $U(s)$ を設定すると、

$$\frac{K}{Ts + 1} E(s) - sY(s) = U(s) \dots\dots ①$$

$$\frac{1}{s(2s + 1)} U(s) = Y(s) \dots\dots ②$$

となるので、①を②に代入して整理すると、

$$\frac{1}{s(2s + 1)} \left\{ \frac{K}{Ts + 1} E(s) - sY(s) \right\} = Y(s)$$

$$\frac{K}{s(2s + 1)(Ts + 1)} E(s) - \frac{1}{2s + 1} Y(s) = Y(s)$$

$$Y(s) + \frac{1}{2s + 1} Y(s) = \frac{K}{s(2s + 1)(Ts + 1)} E(s)$$

$$\frac{2s + 2}{2s + 1} Y(s) = \frac{K}{s(2s + 1)(Ts + 1)} E(s)$$

$$2(s + 1)Y(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} E(s)$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K}{2s(s + 1)(Ts + 1)}$$

と求められる。

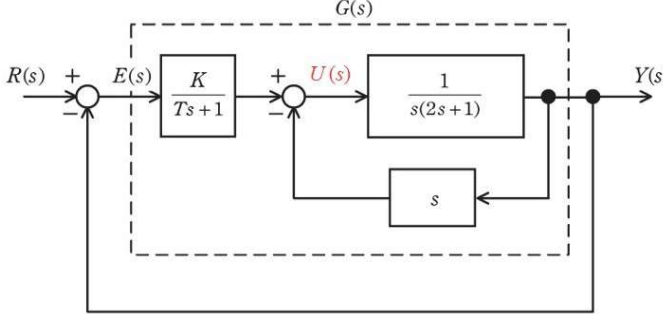


図 1

(2)閉ループ伝達関数 $W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$

問題図のフィードバック制御系において、

$$\{R(s) - Y(s)\}G(s) = Y(s)$$

$$G(s)R(s) - G(s)Y(s) = Y(s)$$

$$\{1 + G(s)\}Y(s) = G(s)R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

となるので、(1)解答式を代入すると、

【ワンポイント解説】

自動制御を得意とする受験生は比較的多いですが、この年の問題は計算量が多く、解くのに時間がかかる問題となっています。練習でも時間を計測し、30 分でどこまでできるかやってみるようなすると良いと思います。今回の伝達関数は分母が三次式となるので、ナイキストかラウスの安定判別法を用いる必要があります。

1. ナイキストの安定判別法

開ループ周波数伝達関数 $G_0(j\omega)$ が与えられている時、 $G_0(j\omega)$ が実軸と交わる点が、 $(-1, 0)$ より右側ならば安定、左側ならば不安定、 $(-1, 0)$ であれば安定限界となります。

2. ラウスの安定判別法

特性方程式

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列
1 行	a_0	a_2	$a_4 \dots$
2 行	a_1	a_3	$a_5 \dots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$\dots$
4 行	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	

3. 定常偏差(最終値の定理)

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると、 $f(t)$ の定常偏差は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

で求められます。

【解答】

(1) 伝達関数が $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$ で与えられるとき、制御対象の単位インパルス応答

単位インパルス信号 $\delta(t)$ のラプラス変換は 1 であるから、

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{s^2+4} \end{aligned}$$

となる。 $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ の公式を利用して、ラプラス逆変換すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+2^2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \sin 2t \end{aligned}$$

と求められる。

(2) $F(s) = 0$, $C_1(s) = K_1 \left(1 + \frac{1}{s}\right)$, $C_2(s) = K_2 s$ のとき、 $R(s)$ から $E(s)$ までの伝達関数を K_1 と K_2 までの伝達関数

問題図より、各関係式は、

$$R(s) - Y(s) = E(s) \quad \dots (1)$$

$$F(s)R(s) + C_1(s)E(s) - C_2(s)Y(s) = U(s) \quad \dots (2)$$

$$G(s)U(s) = Y(s) \quad \dots (3)$$

で与えられる。③を①及び②に代入すると、

$$R(s) - G(s)U(s) = E(s) \quad \dots (1)'$$

$$F(s)R(s) + C_1(s)E(s) - C_2(s)G(s)U(s) = U(s)$$

$$F(s)R(s) + C_1(s)E(s) = (1 + C_2(s)G(s))U(s)$$

$$U(s) = \frac{F(s)R(s) + C_1(s)E(s)}{1 + C_2(s)G(s)} \quad \dots (2)'$$

となり、 $F(s) = 0$ を (2)' に代入して、(2)' を (1)' に代入すると、

$$R(s) - G(s) \frac{C_1(s)E(s)}{1 + C_2(s)G(s)} = E(s)$$

$$R(s) = \left(1 + \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_2(s)G(s)}\right) E(s)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + C_2(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s) + C_2(s)G(s)}$$

となるので、各値を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{1 + K_2 s \cdot \frac{1}{s^2+4}}{1 + K_1 \left(1 + \frac{1}{s}\right) \frac{1}{s^2+4} + K_2 s \cdot \frac{1}{s^2+4}} \\ &= \frac{s(s^2+4) + K_2 s^2}{s(s^2+4) + K_1(s+1) + K_2 s^2} \\ &= \frac{s(s^2 + K_2 s + 4)}{s^3 + K_2 s^2 + (K_1 + 4)s + K_1} \end{aligned}$$

と求められる。

(3) 図の制御系が安定限界となるとき、 K_1 と K_2 が満たすべき関係及びこのとき制御系が示す応答

ワンポイント解説「2. ラウスの安定判別法」より、ラウス表を作成すると、下表ようになる。

	1 列	2 列
1 行	1	$K_1 + 4$
2 行	K_2	K_1
3 行	$\frac{K_2(K_1 + 4) - K_1}{K_2}$	0
4 行	K_1	

上表より、安定限界の条件は、

$$\frac{K_2(K_1 + 4) - K_1}{K_2} = 0$$

$$K_2(K_1 + 4) - K_1 = 0$$

$$K_2(K_1 + 4) = K_1$$

と求められる。

安定限界のとき、制御系の応答は持続的な振動となる。

【ワンポイント解説】

フィードバック制御系からの出題で、1 問 1 問はそれほど難しい内容ではありませんが、問題量が多く(6)にラウスの安定判別式を利用する必要があるため、やや難しめの問題となります。

電験 2 種のフィードバック制御系に関する問題は本問を理解していれば、ほとんどの問題が解けるようになると思います。

1. 基本的なラプラス変換

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると次のような関係があります。

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
K	$\frac{K}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

2. ラウスの安定判別法

特性方程式

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列
1 行	a_0	a_2	$a_4 \cdots$
2 行	a_1	a_3	$a_5 \cdots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$\cdots$
4 行	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	

3. 定常偏差(最終値の定理)

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると、 $f(t)$ の定常偏差は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

で求められます。

【解答】

(1) $D(s) = 0$ の場合、制御対象だけを取り出したとき、 $u(t)$ として単位ステップ応答を加えた時の出力応答 $y(t)$

単位ステップ応答のラプラス変換 $U(s)$ は、ワンポイント解説「1. 基本的なラプラス変換」より、

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

であるから、制御対象だけを取り出したとき $Y(s)$ は、

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s+1)} U(s) \\ &= \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s^2(s+1)} \cdots \cdots \cdots \quad (1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $Y(s) = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$ とおくと、

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+1} \\ &= \frac{(As+B)(s+1) + Cs^2}{s^2(s+1)} \\ &= \frac{(A+C)s^2 + (A+B)s + B}{s^2(s+1)} \cdots \cdots \quad (2) \end{aligned}$$

となるので、①及び②を比較すると、

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ A+B &= 0 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

となる。これらの関係式より、 $A = -1$ 、 $B = 1$ 、 $C = 1$ と求められ、

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-s+1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

となり、これをラプラス逆変換すると、ワンポイント解説「1. 基本的なラプラス変換」の通り、

$$y(t) = t - 1 + e^{-t} \quad (t \geq 0)$$

と求められる。

(2) 補償器だけを取り出したとき、 $E(s)$ から $U(s)$ までの伝達関数

補償器の関係式は、

$$U(s) = \left\{ E(s) + \frac{1}{s} U(s) \right\} C(s)$$

となるので、整理して伝達関数を求めると、

$$U(s) = E(s)C(s) + \frac{1}{s} U(s)C(s)$$

$$U(s) - \frac{1}{s} U(s)C(s) = E(s)C(s)$$

$$U(s) \left\{ 1 - \frac{1}{s} C(s) \right\} = E(s)C(s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{C(s)}{1 - \frac{1}{s} C(s)}$$

$$G_1(s) = \frac{sC(s)}{s - C(s)}$$

と求められる。

(3) $R(s) = 0$ のとき, $D(s)$ から $E(s)$ までの伝達関数

(2) 及びブロック線図より関係式は,

$$E(s) = -Y(s) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)}U(s) + D(s) \quad \dots \textcircled{4}$$

$$U(s) = \frac{sC(s)}{s-C(s)}E(s) \quad \dots \textcircled{5}$$

となるので, ⑤を④に代入すると,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{sC(s)}{s-C(s)}E(s) + D(s)$$

$$= \frac{C(s)}{(s+1)\{s-C(s)\}}E(s) + D(s)$$

となり, これを③に代入し, 伝達関数を求めると,

$$E(s) = -\left[\frac{C(s)}{(s+1)\{s-C(s)\}}E(s) + D(s)\right]$$

$$E(s) + \frac{C(s)}{(s+1)\{s-C(s)\}}E(s) = -D(s)$$

$$\left[1 + \frac{C(s)}{(s+1)\{s-C(s)\}}\right]E(s) = -D(s)$$

$$\frac{(s+1)\{s-C(s)\} + C(s)}{(s+1)\{s-C(s)\}}E(s) = -D(s)$$

$$\frac{s^2 + \{1-C(s)\}s}{(s+1)\{s-C(s)\}}E(s) = -D(s)$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{(s+1)\{s-C(s)\}}{s\{s+1-C(s)\}}$$

と求められる。

(4) $C(s) = \frac{s}{Ts+1}$ を選んだとき, 外乱 $d(t)$ がランプ関数 $d(t) = t$ が与えられているときの定常速度偏差(3) の解答式に $C(s) = \frac{s}{Ts+1}$ を代入すると,

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{(s+1)\left(s - \frac{s}{Ts+1}\right)}{s\left(s+1 - \frac{s}{Ts+1}\right)}$$

となり, 分母分子に $Ts+1$ をかけると,

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{(s+1)\{s(Ts+1) - s\}}{s\{(s+1)(Ts+1) - s\}}$$

$$= -\frac{Ts(s+1)}{Ts^2 + Ts + 1}$$

となる。ランプ関数のラプラス変換 $D(s) = \frac{1}{s^2}$ であるから, 定常速度偏差は, ワンポイント解説「3. 定常偏差(最終値の定理)」の通り,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ -\frac{Ts(s+1)}{Ts^2 + Ts + 1} \right\} D(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ -\frac{Ts(s+1)}{Ts^2 + Ts + 1} \right\} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ -\frac{T(s+1)}{Ts^2 + Ts + 1} \right\}$$

$$= -T$$

と求められる。

(5) 外乱 $d(t)$ の影響が偏差 $e(t)$ に現れないようにするための時定数 T (4) より定常速度偏差が $-T$ であるので, 外乱の影響が出ないようにするためには時定数 T をできるだけ小さくすれば良い。**(6) 点線で囲んだ補償器を $K_1 + \frac{K_2}{s}$ に置き換えたときのフィードバック制御系が安定となる条件** $K_1 + \frac{K_2}{s}$ に置き換えたときの閉ループ伝達関数を求めると,

$$\{R(s) - Y(s)\} \left(K_1 + \frac{K_2}{s} \right) \frac{1}{s(s+1)} = Y(s)$$

$$\left(K_1 + \frac{K_2}{s} \right) R(s) = \left\{ s(s+1) + \left(K_1 + \frac{K_2}{s} \right) \right\} Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_1 + \frac{K_2}{s}}{s(s+1) + \left(K_1 + \frac{K_2}{s} \right)}$$

$$G_3(s) = \frac{K_1s + K_2}{s^3 + s^2 + K_1s + K_2}$$

となる。これより, 特性方程式は

$$s^3 + s^2 + K_1s + K_2 = 0$$

で与えられるので, ワンポイント解説「2. ラウスの安定判別法」により, ラウスの数表を作成すると,

	1 列	2 列
1 行	1	K_1
2 行	1	K_2
3 行	$K_1 - K_2$	0
4 行	K_2	

となり, これより安定となる条件は,

$$K_2 > 0$$

$$K_1 - K_2 > 0$$

となるので, まとめると,

$$K_1 > K_2 > 0$$

と求められる。



過去に解法を指定されたことはありませんが, 余裕のある方はフルビッツの安定判別法も使えるようにしておきましょう。

【ワンポイント解説】

伝達関数の導出から減衰係数, 固有角周波数, 安定度まで幅広く取り扱っている問題です。それぞれの内容の難易度はそれほど高くありませんが, 問題量が多く解答にやや時間を要する問題であるため, 途中で迷うことなくできるだけ速く解けるようにする練習が必要です。

1. 基本的なラプラス変換

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると次のような関係があります。

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
K	$\frac{K}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

2. ラウスの安定判別法

特性方程式

$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$ が与えられているとき, ラウスの数表は下表のように描くことができ, 1 列の値がすべて同符号であるとき, 制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列
1 行	a_0	a_2	$a_4 \cdots$
2 行	a_1	a_3	$a_5 \cdots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	$\cdots$
4 行	$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	

3. 定常偏差(最終値の定理)

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると, $f(t)$ の定常値は,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

で求められます。

4. 減衰係数 ζ と固有角振動数 ω_n

2 次遅れの伝達関数 $W(s)$ の一般式は, 減衰係数 ζ , 固有振動数 ω_n とすると,

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

で表されます。

【解答】

(1) $R(s) = 0$ のとき, $D(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数

$R(s) = 0$ のとき, 制御系の左側から入る信号は全て零となるから, 制御系の右側のみを検討すればよい。

$$U(s) = -Y(s)K(s) \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

$$Y(s) = D(s) + G(s)U(s) \quad \cdots \cdots \cdots \text{②}$$

であるから, ①を②に代入して整理すると,

$$Y(s) = D(s) + G(s)\{-Y(s)K(s)\}$$

$$= D(s) - K(s)G(s)Y(s)$$

$$Y(s) + K(s)G(s)Y(s) = D(s)$$

$$\{1 + K(s)G(s)\}Y(s) = D(s)$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + K(s)G(s)}$$

と求められる。

(2) $D(s) = 0$ のとき, $R(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数

$D(s) = 0$ のとき, フィードバック制御系が満たす関係式は,

$$U(s) = R(s) \cdot \frac{F(s)}{G(s)} + \{R(s)F(s) - Y(s)\}K(s) \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad \cdots \cdots \text{④}$$

であるから, ③を④に代入して整理すると,

$$Y(s) = G(s) \left[R(s) \cdot \frac{F(s)}{G(s)} + \{R(s)F(s) - Y(s)\}K(s) \right]$$

$$Y(s) = F(s)R(s) + \{F(s)R(s) - Y(s)\}K(s)G(s)$$

$$= F(s)R(s) + K(s)G(s)F(s)R(s) - K(s)G(s)Y(s)$$

$$Y(s) + K(s)G(s)Y(s) = F(s)R(s) + K(s)G(s)F(s)R(s)$$

$$\{1 + K(s)G(s)\}Y(s) = \{1 + K(s)G(s)\}F(s)R(s)$$

$$Y(s) = F(s)R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = F(s)$$

と求められる。

(3)指定された条件を満たす 2 次系の補償器 $F(s)$ の係数 a, b, c

ワンポイント解説「1.基本的なラプラス変換」の通り、

$R(s) = \frac{1}{s}$ であるから、(2)の解答式にこれと

$F(s) = \frac{c}{s^2 + as + b}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} Y(s) &= F(s)R(s) \\ &= \frac{c}{s^2 + as + b} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

となる。ワンポイント解説「3.最終値の定理」より、出力 $y(t)$ の定常値が 1 であるから、

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{c}{s^2 + as + b} \cdot \frac{1}{s} \right) = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{c}{s^2 + as + b} = 1$$

$$\frac{c}{b} = 1$$

$$c = b \quad \dots \dots \textcircled{5}$$

となる。また、ワンポイント解説「4.減衰係数 ζ と固有角周波数 ω_n 」の通り、 $F(s)$ を 2 次遅れの伝達関数の一般式と比較すると、

$$\begin{aligned} a &= 2\zeta\omega_n \\ &= 2 \times 0.8 \times 10 \\ &= 16 \\ b &= \omega_n^2 \\ &= 10^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

と求められ、 $\textcircled{5}$ より $c = b = 100$ と求められる。

(4)補償器 $K(s)$ 及び各係数 K_P, T_I, T_D の名称

$K(s)$: PID 補償器

K_P : 比例ゲイン

T_I : 積分時間

T_D : 微分時間

① PはProportional (比例) を, IはIntegral (積分) を, DはDifferentialを表します。

(5)制御系全体が安定となるために補償器 $K(s)$ の係数 K_P, T_I, T_D が満たさなければならない条件

制御系全体が安定となるためには(1)で求めた外乱 $D(s)$ に対する制御が安定でなければならない。(1)の解答式に $G(s) = \frac{1}{s^2}$, $K(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \\ &= \frac{1}{1 + \left\{ K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \right\} \frac{1}{s^2}} \\ &= \frac{s^3}{s^3 + K_P s \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)} \\ &= \frac{s^3}{s^3 + K_P T_D s^2 + K_P s + \frac{K_P}{T_I}} \end{aligned}$$

となるので、特性方程式は、

$$s^3 + K_P T_D s^2 + K_P s + \frac{K_P}{T_I} = 0$$

となる。ワンポイント解説「2.ラウスの安定判別法」により、ラウス表を作成すると、

	1 列	2 列
1 行	1	K_P
2 行	$K_P T_D$	$\frac{K_P}{T_I}$
3 行	$\frac{K_P^2 T_D - \frac{K_P}{T_I}}{K_P T_D}$	0
4 行	$\frac{K_P}{T_I}$	

となるので、安定となるためには、

$$\frac{K_P^2 T_D - \frac{K_P}{T_I}}{K_P T_D} > 0$$

$$K_P T_D - \frac{1}{T_I} > 0$$

$$K_P T_D > \frac{1}{T_I}$$

$$K_P T_D T_I > 1$$

と満たす必要がある。

【ワンポイント解説】

フィードバック制御系の安定限界の導出からボード線図の作図も絡めた問題です。

計算量や作業が非常に多く、時間を非常に要する問題であったかなと思います。(1)や(4)の内容が頻出となりますので、理解しておくようにしましょう。

1.ラウスの安定判別法

特性方程式

$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$
与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列	
1 行	a_0	a_2	a_4	...
2 行	a_1	a_3	a_5	...
3 行	$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	...	
4 行	$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$	...	
	$\vdots$	$\vdots$		

2.ボード線図

周波数伝達関数が $W(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$ で与えられる時、ゲイン g は、

$$g = 20 \log_{10} |W(j\omega)|$$
$$= 20 \log_{10} \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \text{ [dB]}$$

となりますが、 $\omega \ll \frac{1}{T}$ すなわち $\omega T \ll 1$ のとき、

$$g \approx 20 \log_{10} \frac{K}{\sqrt{1 + 0}}$$
$$= 20 \log_{10} K$$

とほぼ一定の値となり、 $\omega \gg \frac{1}{T}$ すなわち $\omega T \gg 1$ のとき、

$$g \approx 20 \log_{10} \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2}}$$
$$= 20 \log_{10} \frac{K}{\omega T}$$
$$= 20 \log_{10} K - 20 \log_{10} \omega T$$

となり、横軸に対数座標をとると、ほぼ直線的に減少していくことになります。したがって、ボード線図は図 3 のようになります。

図 3 において $\omega = \frac{1}{T}$ となる角周波数を折れ点角周波

数と呼びます。

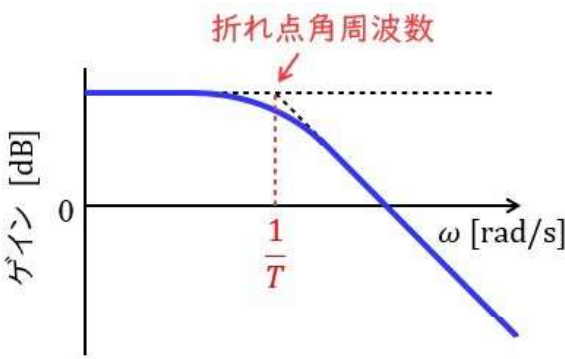


図 3

❗ 参考書によっては、常用対数の底の表記を省略することもあります。例えば、以下のように表記されることもあります。

$g = 20 \log |W(j\omega)|$

【解答】

(1)図 1 のフィードバック系の安定限界を与える K_1 の値とそのときの持続振動の角周波数 ω_1

図 1 の関係式は、

$$R(s) - Y(s) = E(s) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
$$E(s) \cdot K_1 \cdot \frac{100}{s(s+1)(s+40)} = Y(s) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であるので、②に①を代入すると、

$$\{R(s) - Y(s)\} \cdot K_1 \cdot \frac{100}{s(s+1)(s+40)} = Y(s)$$
$$100K_1\{R(s) - Y(s)\} = s(s+1)(s+40)Y(s)$$
$$100K_1R(s) - 100K_1Y(s) = s(s+1)(s+40)Y(s)$$
$$100K_1R(s) = \{s(s+1)(s+40) + 100K_1\}Y(s)$$
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100K_1}{s(s+1)(s+40) + 100K_1}$$
$$= \frac{100K_1}{s^3 + 41s^2 + 40s + 100K_1}$$

と整理できるので、特性方程式は $s^3 + 41s^2 + 40s + 100K_1 = 0$ となる。これに、ラウスの安定判別法を適用すると、ワンポイント解説「1.ラウスの安定判別法」の通り、

3.ラウスの安定判別法

特性方程式

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列	
1 行	a_0	a_2	a_4	...
2 行	a_1	a_3	a_5	...
3 行	$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	...	
4 行	$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$	...	
	$\vdots$	$\vdots$		

4.最終値の定理

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると、 $f(t)$ の定常値は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

で求められます。

【解答】

(1) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数

点線内のブロック線図において、

$$\{U(s) - K_2sY(s)\} \frac{1}{s(s+1)(s+5)} = Y(s)$$

の関係があるから、これを整理すると、

$$\begin{aligned} U(s) - K_2sY(s) &= Y(s)\{s(s+1)(s+5)\} \\ &= Y(s)(s^3 + 6s^2 + 5s) \\ U(s) &= Y(s)(s^3 + 6s^2 + 5s) + K_2sY(s) \\ &= Y(s)\{s^3 + 6s^2 + (K_2 + 5)s\} \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + (K_2 + 5)s} \\ &= \frac{1}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5)} \end{aligned}$$

と求められる。

(2) $R(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数

(1)で求めた伝達関数を $W(s)$ とおくと、問題図のブロック線図における関係式は、

$$\{R(s) - Y(s)\}K_1 \cdot W(s) = Y(s)$$

となるので、これを整理し計算していくと、

$$\begin{aligned} K_1W(s)R(s) - K_1W(s)Y(s) &= Y(s) \\ K_1W(s)R(s) &= Y(s) + K_1W(s)Y(s) \end{aligned}$$

$$= \{1 + K_1W(s)\}Y(s)$$

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{K_1W(s)}{1 + K_1W(s)} \\ &= \frac{K_1 \cdot \frac{1}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5)}}{1 + K_1 \cdot \frac{1}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5)}} \\ &= \frac{\frac{K_1}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5)}}{\frac{s(s^2 + 6s + K_2 + 5) + K_1}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5)}} \\ &= \frac{K_1}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5) + K_1} \\ &= \frac{K_1}{s^3 + 6s^2 + (K_2 + 5)s + K_1} \end{aligned}$$

と求められる。

(3)フィードバック制御系が安定となるための K_1 と K_2 が満たすべき条件及び安定限界における持続振動の角周波数

(2)解答式において、特性方程式は

$s^3 + 6s^2 + (K_2 + 5)s + K_1 = 0$ となるので、ラウスの安定判別法に沿ってラウス表を作成すると、ワンポイント解説「3.ラウスの安定判別法」の通り、

	1 列	2 列
1 行	1	$K_2 + 5$
2 行	6	K_1
3 行	$\frac{6(K_2 + 5) - K_1}{6}$	
4 行	K_1	

となるので、

$$K_1 > 0 \quad \dots \dots \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{6(K_2 + 5) - K_1}{6} > 0$$

$$6(K_2 + 5) - K_1 > 0$$

$$K_1 < 6(K_2 + 5) \quad \dots \dots \quad \textcircled{2}$$

が成立するとき安定となる。したがって、まとめると、

$$0 < K_1 < 6(K_2 + 5)$$

と求められる。安定限界においては、

$K_1 = 6(K_2 + 5)$ が成立するので、特性方程式は、

$$s^3 + 6s^2 + (K_2 + 5)s + 6(K_2 + 5) = 0$$

となる。ここで、 $s = j\omega_c$ とおき、持続振動の角周波数を求めると、

$$-j\omega_c^3 - 6\omega_c^2 + j(K_2 + 5)\omega_c + 6(K_2 + 5) = 0$$

$$6(K_2 + 5) - 6\omega_c^2 + j(K_2 + 5)\omega_c - j\omega_c^3 = 0$$

$$6\{(K_2 + 5) - \omega_c^2\} + j\omega_c\{(K_2 + 5) - \omega_c^2\} = 0$$

となり、実部虚部とも零でなければならないので、

$$(K_2 + 5) - \omega_c^2 = 0$$

$$\omega_c^2 = K_2 + 5$$

$$\omega_c = \sqrt{K_2 + 5}$$

と求められる。

(4)目標値 $r(t)$ がランプ関数 $r(t) = t$ のときの定常速度偏差

$R(s)$ から $E(s)$ までの関係式は、

$$-E(s) \cdot K_1 W(s) + R(s) = E(s)$$

であるので、これを $E(s)$ について整理すると、

$$\begin{aligned} R(s) &= E(s) + K_1 W(s) E(s) \\ &= \{1 + K_1 W(s)\} E(s) \\ &= \left\{1 + \frac{K_1}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5)}\right\} E(s) \end{aligned}$$

$$= \frac{s(s^2 + 6s + K_2 + 5) + K_1}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5)} E(s)$$

$$E(s) = \frac{s(s^2 + 6s + K_2 + 5)}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5) + K_1} R(s)$$

となる。ここで、ワンポイント解説「1.基本的なラプラス変換」の通り、ランプ関数 $r(t) = t$ のラプラス変換 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ なので、これを代入し、定常速度偏差を求めると、ワンポイント解説「4.最終値の定理」の通り、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \cdot \frac{s(s^2 + 6s + K_2 + 5)}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5) + K_1} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s^2 + 6s + K_2 + 5}{s(s^2 + 6s + K_2 + 5) + K_1} \right\} \\ &= \frac{K_2 + 5}{K_1} \end{aligned}$$

と求められる。

(5)a. K_1 を固定したとき、 K_2 を大きくすると、速応性と定常特性はどのように変化するか

(1)及び(2)解答式より、 K_2 を大きくすると、 $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数が小さくなり、ゲインが低下する。ゲインが低下するとフィードバック制御系の速応性は低下する。また、(4)解答式より、 K_2 を大きくすると、定常速度偏差が増大するため、定常特性としては劣化する。

(5)b. K_2 を固定したとき、 K_1 を大きくすると、減衰特性と定常特性はどのように変化するか

(3)の安定条件より、 K_1 を大きくすると安定限界に近づくため振動的になり減衰特性は悪くなる。また、(4)解答式より、 K_1 を大きくすると、定常速度偏差が低下するため、定常特性としては改善する。