

【ワンポイント解説】

負荷から電源側に流れる高調波電流の計算に関する問題です。

2種でも平成25年問5に類題が出題されており、1種受験生であるとはほとんどの受験生が一度は取り組んだことがある内容であると思うので、確実に理解するようにして下さい。

1. オーム法から単位法への変換

基準容量 P_n [V・A]，基準電圧 V_n [V]，基準電流 I_n [A] の時，インピーダンス Z [Ω] を単位法で表すと，

$$\begin{aligned} Z [\text{p.u.}] &= \frac{Z [\Omega] I_n}{\frac{V_n}{\sqrt{3}}} (\text{定義}) = \frac{\sqrt{3} Z [\Omega] I_n}{V_n} \\ &= \frac{\sqrt{3} Z [\Omega] V_n I_n}{V_n^2} = \frac{P_n Z [\Omega]}{V_n^2} (\because P_n = \sqrt{3} V_n I_n) \end{aligned}$$

となります。

2. 単位法における容量換算

「1. オーム法から単位法への変換」の通り，単位法のインピーダンスは基準容量に比例します。したがって，基準容量 P_A から P_B へ変換する場合の単位法におけるインピーダンスは，

$$Z_B [\text{p.u.}] = \frac{P_B}{P_A} Z_A [\text{p.u.}]$$

となります。

3. コイルやコンデンサのリアクタンス

コイル L [H]，コンデンサ C [F] があり，電源周波数 f [Hz] が与えられているとき，それぞれのリアクタンス X_L [Ω] 及び X_C [Ω] は，

$$\begin{aligned} jX_L &= j\omega L \\ &= j2\pi f L \\ -jX_C &= \frac{1}{j\omega C} \\ &= \frac{1}{j2\pi f C} \left(\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \times \frac{j}{j} = -j \right) \end{aligned}$$

で求められます。したがって，第5次高調波に対するリアクタンス X_{L5} [Ω] 及び X_{C5} [Ω] は，周波数が5倍となるので，

$$\begin{aligned} jX_{L5} &= j2\pi \times 5f \times L = j5X_L \\ -jX_{C5} &= \frac{1}{j2\pi \times 5f \times C} = -j\frac{X_C}{5} \end{aligned}$$

となります。

【解答】

(1) 負荷から発生する第5高調波電流の大きさを440 V基準で20 Aとすると，6.6 kVの電源側に流出する第5高調波電流は何 Aか

基準容量を $P_n = 10$ [MV・A] とする。

ワンポイント解説「1. オーム法から単位法への変換」及びワンポイント解説「2. 単位法における容量換算」の通り，各リアクタンスを単位法に変換すると，電源側リアクタンス jX_S [p.u.] は，

$$jX_S [\text{p.u.}] = j0.2 [\text{p.u.}]$$

変圧器のリアクタンス jX_T [p.u.] は，

$$\begin{aligned} jX_T [\text{p.u.}] &= \frac{10 \times 10^6}{500 \times 10^3} \times j0.05 \\ &= j1.0 [\text{p.u.}] \end{aligned}$$

となる。力率改善用コンデンサ設備容量は，コンデンサと直列リアクトルを組み合わせた設備の定格電圧及び定格周波数（基本波）における無効電力であるから，そのリアクタンスは自己容量基準で1.0 p.u. であるので，

$$\begin{aligned} jX [\text{p.u.}] &= \frac{10 \times 10^6}{200 \times 10^3} \times j1.0 \\ &= j50.0 [\text{p.u.}] \end{aligned}$$

となり，直列リアクトルのリアクタンス jX_R [p.u.] は，

$$\begin{aligned} jX_R [\text{p.u.}] &= \frac{13}{200} \times j50.0 [\text{p.u.}] \\ &= j3.25 [\text{p.u.}] \end{aligned}$$

コンデンサのリアクタンス $-jX_C$ [p.u.] は，

$$\begin{aligned} -jX_C [\text{p.u.}] &= \frac{-213}{200} \times j50.0 [\text{p.u.}] \\ &= -j53.25 [\text{p.u.}] \end{aligned}$$

となる。変圧器二次側での第5高調波電流の大きさが $I_2 = 20$ [A] であるから，一次側換算すると，

$$I_1 = \frac{V_2}{V_1} \times I_2 = \frac{440}{6.6 \times 10^3} \times 20 \approx 1.3333 [\text{A}]$$

であるため，ワンポイント解説「3. コイル，コンデンサのリアクタンス」の通り，第5高調波に分流の法則を適用すれば，電源側に流出する電流の大きさ I_{5s} [A] は，

$$\begin{aligned} I_{5s} &= \frac{j5X_R - j\frac{X_C}{5}}{j5X_S + j5X_R - j\frac{X_C}{5}} \times I_1 \\ &= \frac{j5 \times 3.25 - j\frac{53.25}{5}}{j5 \times 0.2 + j5 \times 3.25 - j\frac{53.25}{5}} \times 1.3333 \\ &= \frac{5.6}{6.6} \times 1.3333 \\ &\approx 1.1313 \rightarrow 1.13 [\text{A}] \end{aligned}$$

と求められる。

(2) 図の点線で示すように440 V母線に設置した場合，6.6 kV電源側に流出する第5高調波電流は何 Aか

(1)と同様に，第5高調波に分流の法則を適用すれば，電源側に流出する電流の大きさ I'_{5s} [A] は，

$$\begin{aligned} I'_{5s} &= \frac{j5X_R - j\frac{X_C}{5}}{j5X_S + j5X_T + j5X_R - j\frac{X_C}{5}} \times I_1 \\ &= \frac{j5 \times 3.25 - j\frac{53.25}{5}}{j5 \times 0.2 + j5 \times 1.0 + j5 \times 3.25 - j\frac{53.25}{5}} \times 1.3333 \\ &= \frac{5.6}{11.6} \times 1.3333 \\ &\approx 0.64366 \rightarrow 0.644 [\text{A}] \end{aligned}$$

と求められる。

【ワンポイント解説】

文中穴埋め問題が出題されることがありますが，部分点が一切認められないため，個人的にはあまりおすすめできません。時間がない場合を選択するのは OK だと思います。

1. マーレーループ法

ホイーストンブリッジの原理を利用して，地絡事故点までの距離を測定する方法です。図 1 のように健全相と事故相があり，健全相側の抵抗を R_1 ，事故相側の抵抗を R_2 とすると，事故点までの距離 l は，

$$\begin{aligned}\frac{R_1}{2L-l} &= \frac{R_2}{l} \\ R_1 l &= R_2 (2L-l) \\ l &= \frac{2R_2}{R_1 + R_2} L\end{aligned}$$

と求められます。

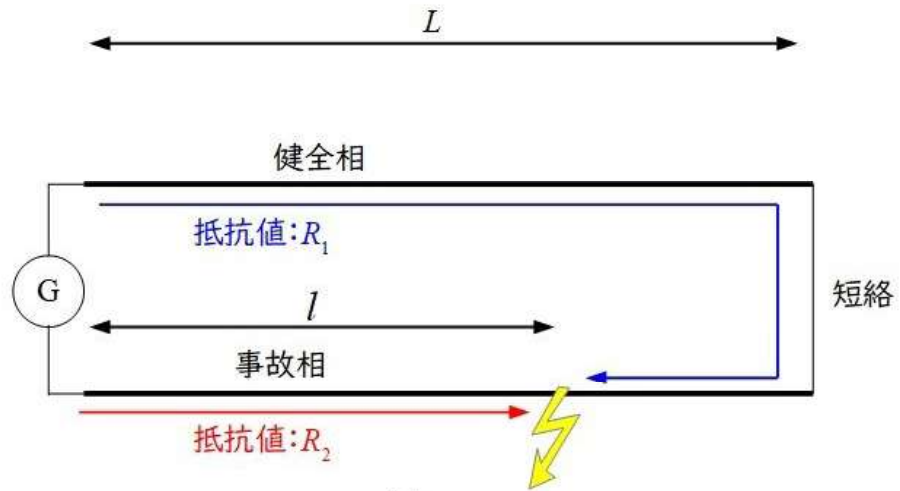


図 1

2. パルスレーダ法

パルス法は問題図に描かれている方法で事故点での反射パルスを検知して，事故点までの距離を求める方法です。パルスの伝搬速度を v とすると，測定点と事故点までの距離 x は，

$$x = \frac{vt}{2}$$

で求められます。

【解答】

(A)量，(B)種類(順不同)

(C)水分量，(D)体積抵抗率，(E)誘電正接(順不同)

(F)絶縁紙のずれや損傷

(G)ケーブル部の部分放電発生位置の測定

(H)断線事故

(I) $\frac{2LR_2}{R_1 + R_2}$ もしくは $\frac{2LR_1}{R_1 + R_2}$

(3) 雷撃後のがいしにかかる電圧の最大値を求める計算式とその値

雷撃後のがいしにかかる電圧の最大値 e_m は、 $e_T (= e_1)$ と雷撃後の電線の電圧 e_L の差となる。

雷撃後の電線の電圧 e_L は、相互サージインピーダンス Z_m より、

$$\begin{aligned} e_L &= Z_m i_1 \\ &= Z_m \cdot \frac{e_1}{Z_g} \\ &= Z_m \cdot \frac{1}{Z_g} e_0 \frac{2Z_g Z_T}{Z_g Z_T + 2Z_T Z_0 + Z_0 Z_g} \\ &= e_0 \frac{2Z_m Z_T}{Z_g Z_T + 2Z_T Z_0 + Z_0 Z_g} \end{aligned}$$

となるから、雷撃後のがいしにかかる電圧の最大値 e_m は、

$$\begin{aligned} e_m &= e_1 - e_L \\ &= e_0 \frac{2Z_g Z_T}{Z_g Z_T + 2Z_T Z_0 + Z_0 Z_g} - e_0 \frac{2Z_m Z_T}{Z_g Z_T + 2Z_T Z_0 + Z_0 Z_g} \\ &= e_0 \frac{2(Z_g - Z_m)Z_T}{Z_g Z_T + 2Z_T Z_0 + Z_0 Z_g} \end{aligned}$$

と求められ、各値を代入すれば、

$$\begin{aligned} e_m &= 10\,000 \times 10^3 \times \frac{2 \times (500 - 150) \times 100}{500 \times 100 + 2 \times 100 \times 400 + 400 \times 500} \\ &\doteq 2\,121.2 \times 10^3 \text{ [V]} \quad \rightarrow \quad 2\,120 \text{ [kV]} \end{aligned}$$

と求められる。

【ワンポイント解説】

電験1種としては近年出題の少ない古典制御からの問題ですが、2年連続して出題されているので、もしかすると傾向が変わってきているかもしれません。

全体として難易度は普通としていますが、(1)～(5)までは易しい問題で、(6)は高難度の問題となります。(6)の三次方程式の解き方は本解説を一例に覚えるようにして下さい。

ただし、合格基準を満たすためには(5)までを正解できれば十分なので、(6)は深追いせず参考程度に留めておいても良いかもしれません。

1. ナイキストの安定判別法

開ループ周波数伝達関数 $G_0(j\omega)$ が与えられている時、 $G_0(j\omega)$ が実軸と交わる点が、 $(-1, 0)$ より右側ならば安定、左側ならば不安定、 $(-1, 0)$ であれば安定限界となります。

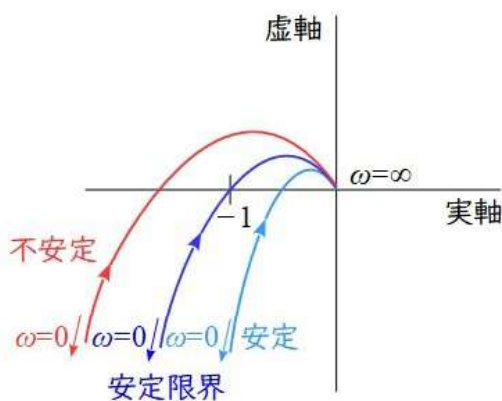


図1

2. ラウスの安定判別法

特性方程式

$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$ が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列
1 行	a_0	a_2	$a_4 \dots$
2 行	a_1	a_3	$a_5 \dots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$\dots$
4 行	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	

【解答】

(1) $\overline{OQ}$ を一巡周波数伝達関数 $G(j\omega)H(j\omega)$ を用いて表す

Q の状態にあるのは、 $\omega = \omega_{cp}$ の時であるから、 $\overline{OQ}$ は、

$$\overline{OQ} = |G(j\omega_{cp})H(j\omega_{cp})|$$

と求められる。

(2) $g_m = 20 \text{ dB}$ のとき $|G(j\omega)H(j\omega)|$ が成立する条件式

$g_m = 20 \log_{10} \frac{1}{\overline{OQ}} [\text{dB}]$ なので、

$$\begin{aligned} g_m &= 20 \log_{10} \frac{1}{\overline{OQ}} \\ &= 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{cp})H(j\omega_{cp})|} \\ &= -20 \log_{10} |G(j\omega_{cp})H(j\omega_{cp})| \end{aligned}$$

となる。上式に各値を代入すると、

$$\begin{aligned} 20 &= -20 \log_{10} |G(j\omega_{cp})H(j\omega_{cp})| \\ -1 &= \log_{10} |G(j\omega_{cp})H(j\omega_{cp})| \\ |G(j\omega_{cp})H(j\omega_{cp})| &= 10^{-1} \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

と求められる。

(3) $G_p(s) = \frac{1}{(1+3s)(1+7s)}$, $G_c(s) = K$, $H(s) = \frac{1}{1+s}$ であるとき、 ω_{cp} の値

一巡周波数伝達関数 $G(j\omega)H(j\omega)$ に各値を代入すると、

$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= G_p(j\omega)G_c(j\omega)H(j\omega) \\ &= \frac{1}{(1+j3\omega)(1+j7\omega)} \cdot K \cdot \frac{1}{1+j\omega} \\ &= \frac{K}{(1+j3\omega)(1+j7\omega)(1+j\omega)} \\ &= \frac{K}{(1-21\omega^2+j10\omega)(1+j\omega)} \\ &= \frac{K}{1+j\omega-21\omega^2-j21\omega^3+j10\omega-10\omega^2} \\ &= \frac{K}{1-31\omega^2+j\omega(11-21\omega^2)} \end{aligned}$$

となる。 $\omega = \omega_{cp}$ の時、上式の虚数部は零となるから、

$$11 - 21\omega_{cp}^2 = 0$$

$$\omega_{cp}^2 = \frac{11}{21}$$

$$\omega_{cp} = \sqrt{\frac{11}{21}} \quad (\because \omega_{cp} > 0)$$

$$\approx 0.72375 \rightarrow 0.724 [\text{rad/s}]$$

と求められる。

(4) 小問(3)のとき、ゲイン余裕を 20 dB とする K の値

(3)より、

$$\begin{aligned} G(j\omega_{cp})H(j\omega_{cp}) &= \frac{K}{1-31\omega_{cp}^2} \\ &= \frac{K}{1-31 \times \frac{11}{21}} \\ &= -\frac{K}{15.238} \end{aligned}$$

であり、(2)より、 $g_m = 20 \text{ dB}$ のとき

$|G(j\omega_{cp})H(j\omega_{cp})| = 0.1$ であるから、これを上式に代入して K を求めると、

$$\begin{aligned} 0.1 &= \frac{K}{15.238} \\ K &= 0.1 \times 15.238 \\ &= 1.5238 \rightarrow 1.52 \end{aligned}$$

と求められる。

【ワンポイント解説】

過去に出題されたことがない問題が出題され、受験生も大変苦勞した問題であると思います。さすがに、本問を初見で解くことは難しいと思います。以下のラウス・フルビッツの安定判別法は電験一種では必須の内容となりますので、よく理解しておきましょう。

1.ラウスの安定判別法

特性方程式

$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$ が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列
1 行	a_0	a_2	$a_4 \cdots$
2 行	a_1	a_3	$a_5 \cdots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	$\cdots$
4 行	$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	

❗

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}, c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

(はラウス表内の文字の位置と対応させて、規則性をみながら覚えると暗記しやすいです。

例えば b_2 は、分母は 1 つ上の要素です。分子は $-\det \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}$ と、左端固定の縦行列 $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ と b_2 から見て右上の縦行列 $\begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$ からなる正方行列の行列式にマイナスを掛けたものとなります。

【解答】

(1)実軸上の根軌跡の区間

一巡伝達関数を根軌跡法に与えられた式と比較すると、 $n = 3, m = 0$ となる。
また、極 $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$ であり、零点はなしとなる。
よって、極 $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$ で区切られる区間のうち、右から奇数番目の区間は、 $-1 \sim 0, -\infty \sim -2$ の区間となる。

(2)漸近線の実軸との交点 σ_c 及び漸近線の角度 θ

(d)より実軸との交点 σ_c 及び漸近線の角度 θ は、

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \frac{1}{3-0} \left(\sum_{i=1}^3 p_i - \sum_{i=1}^0 z_i \right) \\ &= \frac{1}{3} (p_1 + p_2 + p_3) \\ &= \frac{1}{3} (0 - 1 - 2) \\ &= -1\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\theta &= \frac{N\pi}{3-0}, N = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots \\ &= \pm \frac{\pi}{3}, \pm \pi, \pm \frac{5\pi}{3}, \cdots\end{aligned}$$

と求められる。

(3)実軸上の根軌跡を太い実線、漸近線を破線で描く

(1)と(2)の計算結果を集約すると、図 1 の通りとなる。

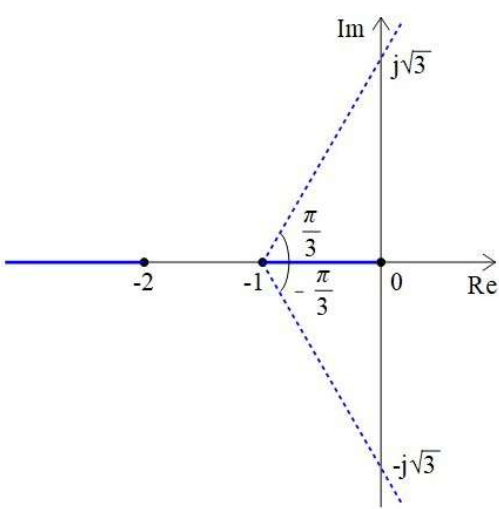


図 1

(4)根軌跡が分岐する点及びそのときの K の値

(e)の式に $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$ を代入すると、

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = 0$$

となるので、式を変形し、 s を求めると、

$$\frac{(s+1)(s+2) + s(s+2) + s(s+1)}{s(s+1)(s+2)} = 0$$
$$(s+1)(s+2) + s(s+2) + s(s+1) = 0$$
$$3s^2 + 6s + 2 = 0$$
$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$$
$$\approx -0.42265, -1.5774$$

となる。図 1 より、分岐点は -1 から 0 の間にあるので、分岐点は -0.423 となる。
また、特性方程式に s の値を代入し、 K の値を求めると、

$$1 + G(s)H(s) = 0$$
$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$
$$K = -s(s+1)(s+2)$$
$$= -(-0.42265)(-0.42265+1)(-0.42265+2)$$
$$= 0.38490 \rightarrow 0.385$$

と求められる。

(5)安定限界となる K

特性方程式は $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$ と整理できるので、ワンポイント解説「1.ラウス・フルビッツの安定判別法」に沿って安定判別すると、

係数がすべて正である $\rightarrow K > 0$
 ラウス表を作成すると次表のようになる。

	1	2
1	1	2
2	3	K
3	$\frac{6-K}{3}$	0
4	K	0

よって、3 行 1 列目の式より $K < 6$ となる。したがって安定限界となるのは、 $K = 0, 6$ の時である。

(6)根軌跡と虚軸との交点

$K = 0$ は $s = 0$ が安定限界であることを示しているので、虚軸との交点となるのは $K = 6$ の時である。特性方程式に $K = 6$ を代入して s の値を求めると、

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0$$

$$s^2(s + 3) + 2(s + 3) = 0$$

$$(s + 3)(s^2 + 2) = 0$$

$$s = -3, \pm j\sqrt{2}$$

となり、虚軸との交点として適しているのは $s = \pm j\sqrt{2}$ となる。

(7)根軌跡の概形

(5), (6)より、根軌跡の概形は図 2 のようになる。

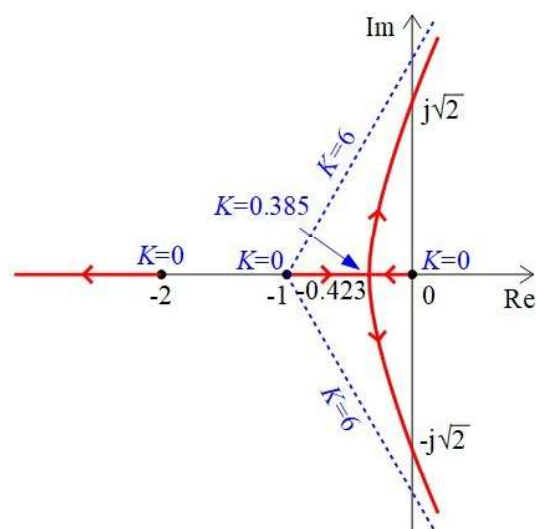


図 2

2. ラウスの安定判別法

特性方程式

$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$
 が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列
1 行	a_0	a_2	$a_4 \dots$
2 行	a_1	a_3	$a_5 \dots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$\dots$
4 行	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	

【解答】

(1) 図 1 に示す制御対象の入力 $U(s)$ に単位ステップ信号を入力したときの出力 $Y(s)$ の時間応答

単位ステップ応答のラプラス変換 $U(s) = \frac{1}{s}$ となるので、

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

となるので、

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

と置くと、この式は、

$$Y(s) = \frac{(A+B+C)s^2 + (3A+2B+C)s + 2A}{s(s+1)(s+2)}$$

となるので、係数比較すると、

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=2 \end{cases}$$

となるので、

$$A=1, B=-2, C=1$$

と求められる。よって、

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

となるので、ラプラス逆変換すると、

$$y(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

と求められる。

(2) 図 2 に示すフィードバック制御系の一巡周波数伝達関数のベクトル軌跡が複素平面の実軸を切るとき、そのときの角周波数 ω_0

図 2 に示すフィードバック制御系の一巡周波数伝達関数 $W(j\omega)$ は、

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \cdot \frac{2}{-\omega^2 + 3j\omega + 2}$$

$$= \frac{2K}{-3\omega^2 + j(-\omega^3 + 2\omega)}$$

となる。この $W(j\omega)$ において、虚部が零となる時の角周波数が ω_0 であるから、

$$\begin{aligned} -\omega_0^3 + 2\omega_0 &= 0 \\ -\omega_0(\omega_0^2 - 2) &= 0 \\ \omega_0 &= 0, \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

となり、 $\omega_0 > 0$ であるから、 $\omega_0 = \sqrt{2}$ となる。この時の一巡周波数伝達関数は、

$$W(j\sqrt{2}) = \frac{2K}{-3(\sqrt{2})^2}$$

$$= -\frac{K}{3}$$

となるので、実軸との交点は $(-\frac{K}{3}, j0)$ となる。

(3) ナイキストの安定判別法を適用して、制御系を安定にするゲイン K の範囲

ワンポイント解説「1. ナイキストの安定判別法」より、安定条件は、

$$\begin{aligned} -\frac{K}{3} &> -1 \\ K &< 3 \end{aligned}$$

と求められる。

(4) 図 2 のフィードバック制御系の特性方程式

図 2 のフィードバック制御系の伝達関数 $G(s)$ は、

$$G(s) = \frac{2K}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

$$= \frac{2K}{1 + \frac{2K}{s(s^2 + 3s + 2)}}$$

$$= \frac{2K}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2K}$$

となるので、特性方程式は、

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 2K = 0$$

と求められる。

(5) 特性方程式のラウス表を示したのち、制御系を安定にするゲイン K の範囲

ワンポイント解説「2. ラウスの安定判別法」より、ラウス表は下表のようになる。

	1 列	2 列
1 行	1	2
2 行	3	$2K$
3 行	$\frac{6-2K}{3}$	0
4 行	$2K$	

よって、安定となる条件は、

$$\begin{aligned} \frac{2K}{3} &> 0 \\ \frac{6-2K}{3} &> 0 \end{aligned}$$

となるので、 $0 < K < 3$ と求められる。**(6) 図 2 のフィードバック制御系が安定限界であるとき、閉ループ伝達関数の三つの極**

安定限界であるとき、 $K=3$ であるから、特性方程式を整理すると、

$$\begin{aligned} s^3 + 3s^2 + 2s + 6 &= 0 \\ s^2(s+3) + 2(s+3) &= 0 \\ (s+3)(s^2+2) &= 0 \\ s &= -3, \pm j\sqrt{2} \end{aligned}$$

と求められる。

(2) $\sin \delta$ 及び各機が分担する有効電力 [kW]

題意に沿ってベクトル図を描くと図 2 のようになる。

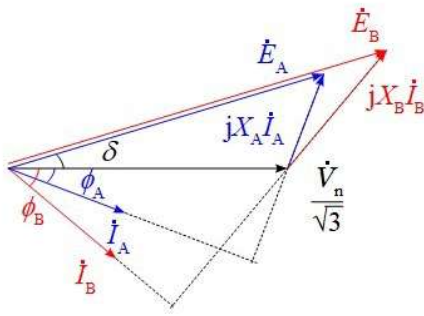


図 2

図 2 より,

$$E_A \sin \delta = X_A I_A \cos \phi_A \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$E_B \sin \delta = X_B I_B \cos \phi_B \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

であり, それぞれの電力 P_A , P_B は,

$$P_A = \sqrt{3} V_n I_A \cos \phi_A$$

$$I_A \cos \phi_A = \frac{P_A}{\sqrt{3} V_n} \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

$$P_B = \sqrt{3} V_n I_B \cos \phi_B$$

$$I_B \cos \phi_B = \frac{P_B}{\sqrt{3} V_n} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

となる。③, ④を①, ②にそれぞれ代入すると,

$$E_A \sin \delta = X_A \frac{P_A}{\sqrt{3} V_n}$$

$$P_A = \frac{\sqrt{3} E_A V_n}{X_A} \sin \delta$$

$$E_B \sin \delta = X_B \frac{P_B}{\sqrt{3} V_n}$$

$$P_B = \frac{\sqrt{3} E_B V_n}{X_B} \sin \delta$$

となり, $P_A + P_B = 15000$ [kW] であるから,

$$\frac{\sqrt{3} E_A V_n}{X_A} \sin \delta + \frac{\sqrt{3} E_B V_n}{X_B} \sin \delta = 15000 \times 10^3$$

$$\sin \delta = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} E_A V_n}{X_A} + \frac{\sqrt{3} E_B V_n}{X_B}} \times 15000 \times 10^3$$

となるので, 各値を代入すると,

$$\sin \delta = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} E_A V_n}{X_A} + \frac{\sqrt{3} E_B V_n}{X_B}} \times 15000 \times 10^3$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3} \times 7269.5 \times 6600}{9.2565} + \frac{\sqrt{3} \times 7401.0 \times 6600}{7.4052}} \times 15000 \times 10^3$$

$$\approx 0.73520 \rightarrow 0.735$$

と求められる。また, 各機が分担する有効電力は,

$$P_A = \frac{\sqrt{3} E_A V_n}{X_A} \sin \delta$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times 7269.5 \times 6600}{9.2565} \times 0.73520$$

$$\approx 6600362$$
 [W] $\rightarrow$ 6600 [kW]

$$P_B = P_L - P_A$$

$$= 15000 - 6600$$

$$= 8400$$
 [kW]

と求められる。

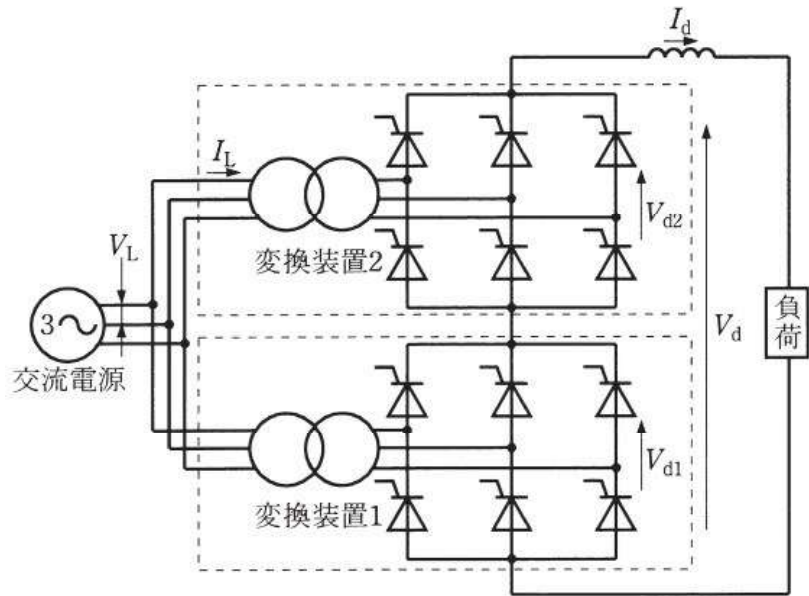


図 3 変換装置の直列接続

【正答チェック表】

日にち					
(1)					
(2)					
(3)	a				
	b				

【ワンポイント解説】

パワーエレクトロニクスの問題では一般的に転流を無視する問題が多いですが、今回の問題はその転流部分にフォーカスした問題となっています。比較的計算としては分かりやすい問題なので、1 種の問題としては標準的と言えるかもしれません。

【解答】

(1) $\cos(\alpha + \mu)$ [rad] を V_L 、 I_d 、 α 及び X を用いて表す

$\alpha < \theta < \alpha + \mu$ の時、 i_c の作る閉回路の回路方程式は、

$$v_{V-U} = 2L \frac{di_c}{dt}$$

であり、図 2 より、 $v_{V-U} = \sqrt{2}V_L \sin \theta$ であるから、

$$2L \frac{di_c}{dt} = \sqrt{2}V_L \sin \theta$$

$$di_c = \frac{V_L}{\sqrt{2}L} \sin \theta dt$$

となる。ここで、 $\theta = \omega t$ すなわち、

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$d\theta = \omega dt$$

であるから、

$$\begin{aligned} di_c &= \frac{V_L}{\sqrt{2}L} \sin \theta dt \\ &= \frac{V_L}{\sqrt{2}\omega L} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{V_L}{\sqrt{2}X} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。ここで、両辺積分すると、

$$\int_0^{I_d} di_c = \int_{\alpha}^{\alpha+\mu} \frac{V_L}{\sqrt{2}X} \sin \theta d\theta$$

$$[i_c]_0^{I_d} = \frac{V_L}{\sqrt{2}X} [-\cos \theta]_{\alpha}^{\alpha+\mu}$$

$$I_d = \frac{V_L}{\sqrt{2}X} \{\cos \alpha - \cos(\alpha + \mu)\}$$

となるので、 $\cos(\alpha + \mu)$ について整理すると、

$$\cos(\alpha + \mu) = \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}XI_d}{V_L}$$

と求められる。

(2) V_d を V_L 、 I_d 、 α 及び X を用いて表す

題意より、転流が無視できる場合の V_d は $\frac{3\sqrt{2}}{\pi} V_L \cos \alpha$ [V] である。

転流による平均電圧降下 ΔV_d は図 2 のハッチング部分を $\frac{\pi}{3}$ で割ったものである。図 2 より転流時の電圧は、 $\frac{v_{V-W} + v_{U-W}}{2}$ であるから、

【ワンポイント解説】

近年は現代制御理論に関する問題が圧倒的に多くなっています。本問は解くのに少し時間がかかりますが、自動制御の問題としては標準かやや易しめな問題で基本的な内容を理解するには非常に良い問題と言えると思います。

1. 行列の可制御性

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

が与えられているとき、可制御性行列 $\mathbf{U}_c = (\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b})$ の rank $\mathbf{U}_c = n$ または $\det \mathbf{U}_c \neq 0$ のとき可制御となります。

②

$\dot{\mathbf{x}}(t)$ とは $\mathbf{x}(t)$ の時間微分、つまり $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ を表します。

2. 行列の可観測性

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$$

が与えられているとき、可観測性行列 $\mathbf{U}_o = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{pmatrix}$ の rank $\mathbf{U}_o = 2$ または $\det \mathbf{U}_o \neq 0$ の時、可観測となります。

②

太字斜体の文字は行列を表します。

また、 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ は縦ベクトルの時間微分を表し、

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

を意味します。

3. ラウスの安定判別法

特性方程式

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列	
1 行	a_0	a_2	a_4	...
2 行	a_1	a_3	a_5	...
3 行	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	...	
4 行	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	...	
	$\vdots$	$\vdots$		

【解答】

(1) $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^T$ を求める

図 2 より、

$$X_1(s) = \frac{1}{s} X_2(s) \Leftrightarrow sX_1(s) = X_2(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s} \{-2X_1(s) - 4X_2(s) + U(s)\}$$

$$\Leftrightarrow sX_2(s)$$

$$= -2X_1(s) - 4X_2(s) + U(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

が成り立つので、両辺をラプラス逆変換すると、

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

となり、状態空間表現をすると、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

となるので、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と求められる。ワンポイント解説「1. 行列の可制御性」より、

$$(\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

であり、

$$\det[(\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b})] = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

であるため、可制御である。また、ワンポイント解説「2. 行列の可観測性」より、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、

$$\det \left[\begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{pmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

であるため、可観測である。

平成 24 年 問 1

問題 【難易度】★★★★☆☆（普通）

定格電圧，定格周波数のもとで運転している三相巻線形誘導電動機がある。本問で考慮する運転範囲では，負荷の要求するトルクは $T = k_0 + k_1 n^2$ で表される。ただし， k_0 ， k_1 は定数であり，また， T は同期ワットで表したトルク（誘導電動機の二次入力に相当）を誘導電動機の定格容量で除した値で，単位法で表したトルクである。 n は回転速度を同期速度で除した値である。次の問に答えよ。

- (1) 滑りを s として， n を s で表す式を求めよ。また，単位法で表した出力及びトルクを P [p.u.] 及び T [p.u.] とするとき， T を s 及び P で表す式を求めよ。
- (2) a. スリップリング間に外部抵抗を挿入して 1 相当りの二次抵抗の値を r_{21} としたところ，電動機の出力 P_1 が 0.6 [p.u.]，滑り s_1 が 0.1 となった。このときのトルク T_1 [p.u.] を求めよ。
b. 外部抵抗を調節し，出力を P_2 [p.u.] にした。このときの滑りを s_2 及びトルクを T_2 [p.u.] とするとき， $T_2 - T_1$ を k_1 ， s_1 及び s_2 で表す式を求めよ。
c. $P_2 = 0.85$ [p.u.] とするとき， s_2 及び T_2 [p.u.] はいくらか。ただし， $k_1 = 1.64$ であり，また， $|x| \ll 1$ のとき $(1 - x)^3 \approx 1 - 3x$ と近似できる。
- (3) 上記(2)で出力 P_2 を 0.85 [p.u.] としたときの 1 相当りの二次抵抗を r_{22} とする。 r_{21} は r_{22} の何倍か。ただし，電動機のトルクと滑りの関係は直線で表されるものとする。

【正答チェック表】

日にち						
(1)						
(2)	a					
	b					
	c					
(3)						

【ワンポイント解説】

閉ループ伝達関数を求め、安定判別する典型的な自動制御の問題です。

1 種で古典制御から出題される場合、比較的複雑な問題が出題されやすく、本問も計算量が膨大で、相当なスピードが求められると思います。また、1 種の場合はラウスの安定判別法が必須の知識となります。

1.解の公式による安定判別法

二次の特性方程式 $as^2 + bs + c = 0$ の根、

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

の全ての根の実数部が負の値であるとき、安定となります。

2.ラウスの安定判別法

特性方程式

$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$ が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列	
1 行	a_0	a_2	a_4	$\dots$
2 行	a_1	a_3	a_5	$\dots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	$\dots$	
4 行	$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$	$\dots$	
	$\vdots$	$\vdots$		

3.最終値の定理

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると、 $f(t)$ の定常値は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

で求められます。

【解答】

(1) $R(s)$ から $Y_R(s)$ までの伝達関数

$R(s)$ から $Y_R(s)$ までの伝達関数を検討する際は、図 1 のように制御系の上側のみを検討すれば良い。

図 1 より、 $R(s)$ と $U_R(s)$ 、 $U_R(s)$ と $Y_R(s)$ の関係式は、

$$U_R(s) = \{R(s) - Y_R(s)\} \cdot K_A(s) \quad \dots \dots \dots \text{①}$$

$$Y_R(s) = U_R(s) \cdot G_M(s) \quad \dots \dots \dots \text{②}$$

であるから、①を②に代入して整理すると、

$$Y_R(s) = \{R(s) - Y_R(s)\} \cdot K_A(s) \cdot G_M(s)$$

$$Y_R(s) = K_A(s)G_M(s)R(s) - K_A(s)G_M(s)Y_R(s)$$

$$\{1 + K_A(s)G_M(s)\}Y_R(s) = K_A(s)G_M(s)R(s)$$

$$\frac{Y_R(s)}{R(s)} = \frac{K_A(s)G_M(s)}{1 + K_A(s)G_M(s)} \quad \dots \dots \dots \text{③}$$

と求められる。

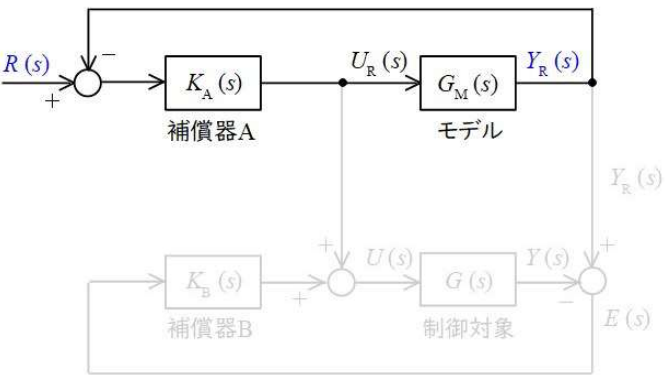


図 1

(2) $R(s)$ から $E(s)$ までの伝達関数

(1)にて上側の制御系の伝達関数は求められており、②及び③より、

$$\begin{aligned} U_R(s) &= \frac{Y_R(s)}{G_M(s)} \\ &= \frac{K_A(s)G_M(s)}{1 + K_A(s)G_M(s)} R(s) \\ &= \frac{K_A(s)}{1 + K_A(s)G_M(s)} R(s) \quad \dots \dots \dots \text{④} \end{aligned}$$

となる。これにより、図 2 のように下側の制御系のみ検討すれば $R(s)$ から $E(s)$ までの伝達関数が求められ

【ワンポイント解説】

自動制御の問題は問題慣れすれば、比較的簡単に解けるようになります。

一種では古典制御においてラウスの安定判別式は必須で、よく記憶しておく必要があります。

1. 基本的なラプラス変換

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると次のような関係があります。

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
K	$\frac{K}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

2. ラウスの安定判別法

特性方程式

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列
1 行	a_0	a_2	$a_4 \dots$
2 行	a_1	a_3	$a_5 \dots$
3 行	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$\dots$
4 行	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	

3. 定常偏差(最終値の定理)

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると、 $f(t)$ の定常偏差は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

で求められます。

【解答】

**(1) 大きさ 1 のステップ入力を $G(s)$ へ加えたとき
この制御対象の伝達関数 $G(s)$**

入力 $u(t) = 1$ ，出力 $y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$ とし、それぞれラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s+2)} \\ &= \frac{1}{s^2(s+2)} \end{aligned}$$

となるので、伝達関数 $G(s)$ は、

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{s^2(s+2)}}{\frac{1}{s}} \\ &= \frac{1}{s(s+2)} \end{aligned}$$

と求められる。

(2) 伝達関数 $G(s) = \frac{1}{s^2(s+6)}$ に置き換えた場合の、目標値 $R(s)$ から偏差 $E(s)$ までの伝達関数

図の伝達関数について、

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad \dots \quad (1)$$

$$U(s) = (K_1 s + K_2) E(s) - 2s Y(s) \quad \dots \quad (2)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+6)} U(s) \quad \dots \quad (3)$$

の連立方程式が成り立つ。③から、

$U(s) = s^2(s+6)Y(s)$ であり、これを②に代入すると、

$$\begin{aligned} s^2(s+6)Y(s) &= (K_1 s + K_2) E(s) - 2s Y(s) \\ (s^3 + 6s^2 + 2s)Y(s) &= (K_1 s + K_2) E(s) \\ Y(s) &= \frac{K_1 s + K_2}{s^3 + 6s^2 + 2s} E(s) \end{aligned}$$

となり、これを①に代入すると、

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - \frac{K_1 s + K_2}{s^3 + 6s^2 + 2s} E(s) \\ E(s) + \frac{K_1 s + K_2}{s^3 + 6s^2 + 2s} E(s) &= R(s) \\ \frac{s^3 + 6s^2 + (K_1 + 2)s + K_2}{s^3 + 6s^2 + 2s} E(s) &= R(s) \\ \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{s^3 + 6s^2 + 2s}{s^3 + 6s^2 + (K_1 + 2)s + K_2} \end{aligned}$$

と求められる。

⑦ 太字斜体の文字は行列を表します。

また, $\frac{dx(t)}{dt}$ は縦ベクトルの時間微分を表し,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

を意味します。

4.行列の安定性

行列の固有値の実数部が正となるものが一つ以上ある場合、実数部が 0 となるものが二つ以上ある場合、二対以上の共役な純虚数が存在する場合、不安定となります。

行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値は、単位行列 $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ の解のことを言います。具体的には、

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= 0 \\ \left| s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{vmatrix} &= 0 \\ (s-a)(s-d) - bc &= 0 \\ s^2 - (a+d)s + ad - bc &= 0 \end{aligned}$$

の s の解となります。

【解答】

(1)状態空間表現 ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^T$)

$f = 1$ のとき、図 1 のブロック線図における関係式は、

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s-1} U(s) \\ sX_1(s) - X_1(s) &= U(s) \\ sX_1(s) &= X_1(s) + U(s) && \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ X_2(s) &= X_1(s) - \frac{5}{s+4} X_1(s) \\ (s+4)X_2(s) &= (s+4)X_1(s) - 5X_1(s) \\ sX_2(s) + 4X_2(s) &= sX_1(s) - X_1(s) \\ sX_2(s) &= -4X_2(s) + X_1(s) + U(s) - X_1(s) && (\because \textcircled{1} \text{を代入}) \\ &= -4X_2(s) + U(s) && \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となるので、①式及び②式を逆ラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_1(t) + u(t) && \dots\dots\dots \textcircled{1}' \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -4x_2(t) + u(t) && \dots\dots\dots \textcircled{2}' \end{aligned}$$

となり、これを行列の形にすれば、

5.ラウスの安定判別法

特性方程式

$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$
が与えられているとき、ラウスの数表は下表のように描くことができ、1 列の値がすべて同符号であるとき、制御系は安定であると判別できます。

	1 列	2 列	3 列	
1 行	a_0	a_2	a_4	...
2 行	a_1	a_3	a_5	...
3 行	$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	...	
4 行	$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$	...	
	$\vdots$	$\vdots$		

6.最終値の定理

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると、 $f(t)$ の定常値は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

で求められます。