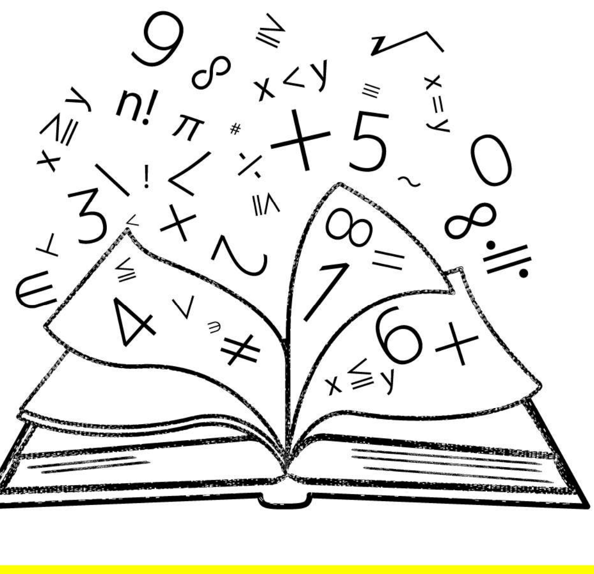
電験2種

過渡現象をラプラス変換で解く30年間

山岸 健太
Kenta Yamagishi



新制度となった
1995年以降の
過去問題を収録！
2025年版

二次試験の機械･制御で必須の
ラプラス変換を先取りすれば
簡単に解ける！

電験２種 過渡現象をラプラス変換で解く 30 年間 2025 年版

目 次

はじめに......2
ラプラス変換を使用した解法......4
過去問の分類表......16
1995 年......17
1996 年......19
1997 年......21
1999 年（1998 年は出題なし）......23
2000 年......25
2002 年（2001 年は出題なし）......27
2003 年......30
2004 年......32
2005 年......38
2006 年......40
2007 年......43
2008 年......45
2009 年......49
2010 年......52
2011 年......56
2012 年......59
2013 年......61
2014 年......67
2015 年......70
2016 年......74
2017 年......77
2018 年......80
2019 年......83
2020 年......87
2021 年......90
2022 年......92
2023 年......96
2024 年......99
関連書籍のご紹介......101

はじめに

本書をお選びいただきありがとうございます。

本書はタイトルの通り，電験２種一次試験の理論科目において最も頻出な過渡現象にフォーカスを当てており，しかもそれを他の参考書のように微分方程式ではなく，ラプラス変換を使用して解説をしております。収録している問題の年数は新制度になった 1995 年から 2024 年の計 30 年です。（正確に言えば２年出題されない年があったので，28 年度分を収録しています。）

過渡現象にフォーカスを当てた理由

電験は２種から計算力がより問われるようになります。特に二次試験は最たるものですが，その二次試験に行く前に大きく立ちふさがる壁として，一次試験の理論科目があります。一次試験の理論科目は知識はもちろんのこと，計算量が多く，計算に慣れていないと 90 分の試験時間内で解ききるのが難しいです。その中でも時間を大量に使う問題は**過渡現象**です。

過渡現象に時間が掛かる理由としては，微分方程式を使用しなければならないからです。微分方程式では，式の種類に応じで解法を使い分け，積分を多用します。電験３種は複素数の四則演算や三角関数までできていれば十分合格できるものでしたが，電験２種では微積分を使えるようになっていないといけません。しかも，普通に受験勉強に取り掛かろうとすると先ずは理論科目からということになるわけですから，このギャップにモチベーションを大きく低下させる受験者も多いはずです。（電力科目と機械科目は，一次試験であればそれほど難易度が上がるわけではありません。法規科目は特別高圧関係の条文を新たに覚えることになります。）

計算量が多い過渡現象ですが，全く別の方法を使えば比較的短時間で解くことができるようになります。その方法とは**ラプラス変換**です。ラプラス変換は電験３種では全く登場してきていない計算方法で，試験として正式に登場してくるのは電験２種二次試験の機械・制御科目からです。そのラプラス変換を先取りして過渡現象に使用することで，微積分を殆ど使わない解答をすることができます。（エネルギー計算など一部積分を使わざるを得ないところはあります。）具体的なラプラス変換の使い方は次章でご説明しますが，メリットを簡単に言うと「過渡現象の状態をあたかも交流回路のように扱い，オームの法則ベースの計算ができる。」ということです。これにより，２階の微分方程式を解かなければならない問題でも，ラプラス変換を使えば２次方程式を解くだけで済みます。どれだけ簡単かは一目瞭然ですね。

とは言いながらも，問題文の誘導上，最初に微分方程式の立式の穴埋めがありますので，少なくとも微分方程式の立式はできておかなければなりません。また，1995 年以降は２年だけですが，ラプラス変換で解くことができない問題がありました。（微分方程式で解くとしても相当な計算量になる問題です。）ということで，全く覚えておかなくても良いかと言うと微妙なところではあります。「どちらも使えるようにしておいて，本番ではラプラス変換を積極的に使い試験時間を節約する」という状態が理想です。

このようにラプラス変換を使用すれば理論科目の合格率を上げることができ，かつ機械・制御科目でも必須の解法であるため，どの道覚えなければいけない解法です。本書を消化することで，読者の方が電験２種に合格できる一助に本書がなれれば幸甚です。

特に本書をおすすめする方

二次試験まで経験したが，また一次試験からやり直さなければならない方は，一度機械・制御科目でラプラス変換を勉強してきたと思いますので，殆ど追加で覚えることがなく，スムーズに本書の方法を習得できるはずです。そうではなく，一次試験に初挑戦の方でももちろん有用な方法ですので，是非解き進めてみて下さい。

また，過渡現象をラプラス変換で解く問題は，**電験１種一次試験の理論科目**で頻繁に出題されます。（大体２年に１回です。）電験１種で出題されるのは本書のレベルですので，電験１種を見越している方は電験２種のときに慣れてしまうのも手です。

本書を発行するまでの経緯

本書は，筆者が運営しているブログ「電験１種の棚卸し(https://den1-tanaoroshi.com/)」から生まれました。（ブログ自体は電験にまつわる様々な内容を取り上げていて，過渡現象を取り上げた記事はごく一部分です。）

私自身も一次試験に挑戦する段階でラプラス変換を使えるようにしていて，そうした経験・知識を本書にまとめました。作成したのはもちろん私ですが，本書をまとめるきっかけを作ってくださったブログ読者の皆さまに感謝致します。

2025 年 4月

山 岸　健 太

ラプラス変換を使用した解法

ラプラス変換を使用して電流の過渡現象を求める流れは，大きく分けて以下の 3 段階です。

1. t 回路から s 回路へ変換する
2. s 回路について電圧降下の式を立てる
3. 逆ラプラス変換をして電流を求める

例題を用いてこれを詳しく解説していきます。

【例題】

下図のような RLC 回路について，時刻 $t < 0$ ではコンデンサ C に初期電荷はなく，回路に電流は流れていない。時刻 $t = 0$ でスイッチSを閉じた。このときの電流 $i_{\mathrm{L}}(t)$， $i_{\mathrm{C}}(t)$ を求めよ。

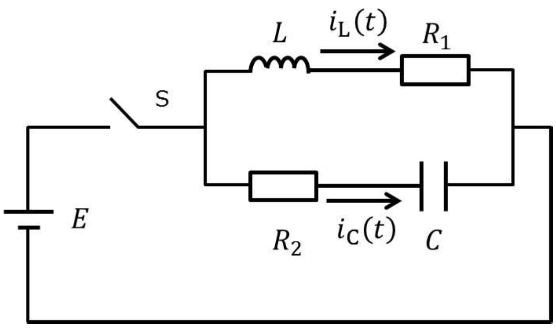


図 1-1

1. t 回路から s 回路へ変換する

図 1-1 は時間 t で表された t 回路です。それぞれの素子をラプラス変換すると，図 1-2 のような s 回路になります。s はラプラス変換に登場してくる演算子です。（数学的な意味はあります。s 回路に変換できる理由については後述します。）

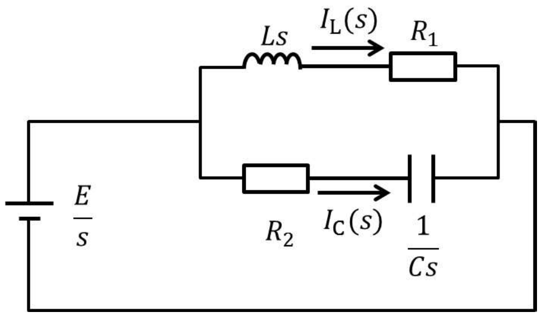


図 1-2

$s \to \mathrm{j}\omega$ と置き換えて改めて図 1-2 を見ると，交流回路と似たような表記になっていることが分かります。試験会場では特に意識しなくて良いことですが，ざっくりとなんでこうなるかということを説明します。

ラプラス変換前の図 1-1 について微分方程式を立てると，次のようになります。

$$\begin{cases} E = L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t} + R_1 i_{\mathrm{L}}(t) \\ E = R_2 i_{\mathrm{C}}(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_{\mathrm{C}}(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

この 2 式をラプラス変換すると以下のようになります。（ラプラス変換の定義からの説明は後述します。）

$$\begin{cases} \dfrac{E}{s} = LsI_{\mathrm{L}}(s) + R_1 I_{\mathrm{L}}(s) \\ \dfrac{E}{s} = R_2 I_{\mathrm{C}}(s) + \dfrac{I_{\mathrm{C}}(s)}{Cs} \end{cases}$$

これを図に描き戻すと図 1-2 のようになります。

ラプラス変換には順変換と逆変換があり，ここで行った $\mathrm{j}\omega \to s$ の順変換は覚えておく必要はなく，変換後の図だけを覚えておけば十分です。ポイントは

1. 交流回路のように $\mathrm{j}\omega \to s$ と置き換える。
2. 電源電圧を s で割る。

の 2 点です。

2.　s 回路について電圧降下式を立てる

ポイント 2 はポイント 1 での説明で立式しました。再掲すると

$$
\begin{cases}
\dfrac{E}{s} = LsI_{\mathrm{L}}(s) + R_1 I_{\mathrm{L}}(s) & \dots(1) \\
\dfrac{E}{s} = R_2 I_{\mathrm{C}}(s) + \dfrac{I_{\mathrm{C}}(s)}{Cs} & \dots(2)
\end{cases}
$$

です。

3.　逆ラプラス変換して電流を求める

式(1)より電流 $i_{\mathrm{L}}(t)$ を求めます。先ず，式(1)を $I_{\mathrm{L}}(s) =$ 　の形に変形します。

$$\frac{E}{s} = (Ls + R_1) I_{\mathrm{L}}(s)$$

$$\therefore I_{\mathrm{L}}(s) = \frac{E}{s(Ls + R_1)}$$

次に部分分数分解という，右辺を $\frac{1}{s}$ の形に分ける操作をします。

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{L}}(s) &= \frac{E}{s(Ls + R_1)} \\
&= \frac{E}{L}\frac{1}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)} && \dots(3) \\
&= \frac{E}{L}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R_1}{L}}\right) \times \frac{L}{R_1} && \dots(4) \\
&= \frac{E}{R_1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R_1}{L}}\right) && \dots(5)
\end{aligned}
$$

式(3)から式(4)への変形を詳しく説明します。式(4)の(　　　)内で，先ずは $\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R_1}{L}}$ を作ります。

このとき，分母が簡単な方から複雑な方を引くようにすると，これから説明する計算が楽になります。

$\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R_1}{L}}$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R_1}{L}} &= \frac{s + \frac{R_1}{L} - s}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)} \\
&= \frac{\frac{R_1}{L}}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)}
\end{aligned}
$$

となります。つまり， $\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R_1}{L}}$ を作ったところに，分子の逆数を掛けておくと式(3)に戻すことができるようになります。どういうことかと言うと，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R_1}{L}}\right) \times \frac{L}{R_1} &= \frac{\frac{R_1}{L}}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)} \times \frac{L}{R_1} \\
&= \frac{1}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)}
\end{aligned}
$$

と戻せます。

この方法は簡単に部分分数分解をできるのでおすすめです。よく参考書にある部分分数分解の説明は，

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{s + \frac{R_1}{L}} = \frac{1}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)}$$

$$\frac{a\left(s + \frac{R_1}{L}\right) + bs}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)} = \frac{1}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)}$$

$$\frac{(a + b)s + \frac{R_1}{L}a}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)} = \frac{1}{s\left(s + \frac{R_1}{L}\right)}$$

の計算をして

$$a + b = 0,\quad \frac{R_1}{L}a = 1$$

$$\therefore a = \frac{L}{R_1},\quad b = -\frac{L}{R_1}$$

と求めて，

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{s + \frac{R_1}{L}} = \frac{L}{R_1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R_1}{L}}\right)$$

として，ようやく部分分数分解できるのですが，試験時間内にこれほどの計算をするのは正直面倒です。

話を戻します。逆ラプラス変換の公式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 & \dots(6) \\ \dfrac{1}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathrm{e}^{-at} & \dots(7) \end{cases}$$

を使って，式(5)を逆ラプラス変換します。（ $\mathcal{L}$ はラプラス変換を意味するLの筆記体で， $\mathcal{L}^{-1}$ は逆ラプラス変換を意味します。）

$$\frac{E}{R_1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R_1}{L}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{E}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R_1}{L}t}\right)$$

つまり，

$$i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R_1}{L}t}\right)$$

となります。

ちなみに，十数個ある逆ラプラス変換の公式のうち過渡現象で覚えるのは式(6)(7)だけです。省エネをするのであれば，式(6)は式(7)で $a = 0$ としているときと覚えることもでき，式(7)だけを覚えればよくなります。逆ラプラス変換の公式がどうしてこうなるのか知りたい場合は，ラプラス変換の専門書でご確認下さい。

次は，式(2)より電流 $i_{\mathrm{C}}(t)$ を求めます。これまでの説明した内容で十分計算できます。

$$\frac{E}{s} = \left(R_2 + \frac{1}{Cs}\right) I_{\mathrm{C}}(s)$$

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{C}}(s) &= \frac{E}{s\left(R_2 + \frac{1}{Cs}\right)} \\ &= \frac{E}{R_2 s + \frac{1}{C}} \\ &= \frac{E}{R_2\left(s + \frac{1}{CR_2}\right)} \\ &= \frac{E}{R_2}\frac{1}{s + \frac{1}{CR_2}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{E}{R_2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR_2}} \end{aligned}$$

まとめ

過渡現象における電流の求め方を以下の 3 段階に分けて説明してきました。

1. t 回路から s 回路へ変換する
2. s 回路について電圧降下の式を立てる
3. 逆ラプラス変換をして電流を求める

微分方程式と比べると，覚える量が格段に少ないことに驚くかもしれません。大体この流れで過去問が解けるので，あとは過去問をみっちり演習して，ラプラス変換を自分のツールにしていって下さい。

おまけ 1：過渡現象にラプラス変換を適応できる理由

ラプラス変換とは

『ラプラス変換』をきちんと説明するには，公式に基づいた説明をきちんとする必要があります。

時間 t の関数である $f(t)$ をラプラス変換して，$F(s)$ という関数を得ようとしたときには，

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

という計算をする必要があります。

> ? s と t の 2 文字が出てきますが、この積分は t を変数としていますので、積分後は t は代入されて消えることになります。つまり全体としては s の関数となります。

ここで s はラプラス演算子と呼ばれ，数学的演算をするための単純なツールのようなものです。s が表現する特定の物理量があるわけではありません。この演算子を使ってラプラス変換をすると，普通であれば微分方程式を解くところを，省エネして四則演算で解けるようになるというだけです。

逆ラプラス変換をするのに別途いくつか覚える公式（下表のようなラプラス変換表の公式です）があり，二次試験の機械・制御で覚えることになります。ただし，過渡現象で使用するラプラス変換では，下表の上 2 つだけを覚えれば十分です。

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{e}^{-at}\sin \omega t$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{e}^{-at}\cos \omega t$

それでは，微分方程式をラプラス変換していく過程を説明していきます。

微分方程式のラプラス変換

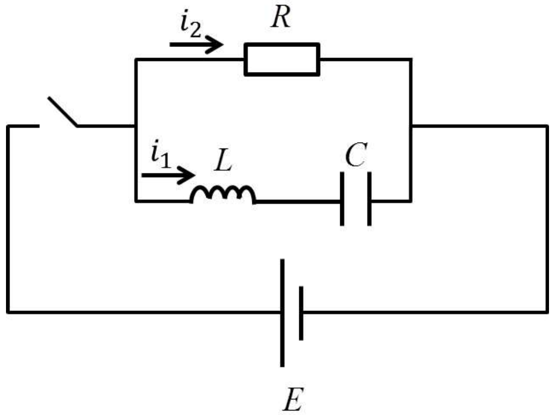


図 1-3

図 1-3 から式(8)(9)の微分方程式を立てることができます。

$$L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i_1 \mathrm{d}t = E \quad \dots(8)$$

$$Ri_2 = E \quad \dots(9)$$

式(8)のラプラス変換

式(8)の両辺をラプラス変換してみます。

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\left(L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i_1 \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} E\mathrm{d}t$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(\frac{1}{C}\int_0^t i_1\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}E\mathrm{d}t \ldots (10)$$

コイル部分の計算は部分積分を使用します。$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ を t で積分すると i_1 に戻ることに注意して，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=L\left\{[\mathrm{e}^{-st}i_1]_0^\infty-\int_0^\infty(-s)\mathrm{e}^{-st}i_1\mathrm{d}t\right\}$$

$$=L\{-i_1(0)+sI_1(s)\}$$

$$=LsI_1(s)-Li_1(0) \quad \ldots (11)$$

となります。

? 定性的な説明となりますが、定電圧電源の回路であるため i は少なくとも指数関数的に発散しないと考えられます。そのため、i は一定値に収束もしくは振動して、i_1 が変化するよりも圧倒的に早く e^{-st} が 0 に収束します。

$Li_1(0)$ は一定値であり，コイルの初期条件が反映されています。

コンデンサ部分の計算も部分積分を使用します。その前に合成関数の微分をして，変数の入れ替えをします。詳しいことは省略しますが，微分は分数のように扱えますので，

$$\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-st}}{\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s\mathrm{e}^{-st}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}}{-s}$$

となります。（ e^{-st} が変数となりました。）これを使うと，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(\frac{1}{C}\int_0^t i_1\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{C}\int_0^\infty\left(\int_0^t i_1\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st}}{-s}$$

$$=\frac{1}{C}\left\{\left[\int_0^t i_1\mathrm{d}t\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_0^\infty-\int_0^\infty i_1\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\mathrm{d}t\right\}$$

$$=-\frac{1}{Cs}\left[\int_0^t i_1\mathrm{d}t\times\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty$$

$$+\frac{1}{Cs}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}i_1\,\mathrm{d}t \quad \ldots (12)$$

となります。

ここで，

$$\left[\int_0^t i_1\mathrm{d}t\times\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty=\int_0^\infty i_1\mathrm{d}t\times\mathrm{e}^{-\infty}$$

$$-\int_0^0 i_1\mathrm{d}t\times\mathrm{e}^0$$

$$=0-0$$

$$=0$$

また，定義通り

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}i_1\,\mathrm{d}t\equiv I(s)$$

となります。

よって式(12)は

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(\frac{1}{C}\int_0^t i_1\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{Cs}\times 0+\frac{1}{Cs}\times I(s)$$

$$=\frac{I(s)}{Cs}$$

となります。

ちなみに，コイルのときと違って，コンデンサの計算では意図的に初期条件を組み込まないと，ラプラス変換後に初期条件が現れてきません。どういうことかというと，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(\frac{1}{C}\int_0^t i_1\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t$$

に初期電荷 Q_0 を

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\frac{1}{C}\left(\int_0^t i_1\mathrm{d}t + Q_0\right)\mathrm{d}t$$

と紛れ込ませます。これを計算していくと

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\frac{1}{C}\left(\int_0^t i_1\mathrm{d}t + Q_0\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left(\frac{1}{C}\int_0^t i_1\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\frac{Q_0}{C}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{I(s)}{Cs} + \frac{Q_0}{C}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \quad \dots(13)$$

ここで，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s} \quad \dots(14)$$

となるので，式(13)は

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\frac{1}{C}\left(\int_0^t i_1\mathrm{d}t + Q_0\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{I(s)}{Cs} + \frac{Q_0}{Cs} \quad \dots(15)$$

となります。

> ? 初期電荷 Q_0 ではなく初期電圧 v_0 が与えられていたときは
>
> $$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\frac{1}{C}\left(\int_0^t i_1\mathrm{d}t + Cv_0\right)\mathrm{d}t = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{v_0}{s}$$
>
> となります。

電圧部分の計算は式(14)と同じように計算して，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}E\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}E\right]_0^\infty$$

$$= \frac{E}{s} \quad \dots(16)$$

となります。

以上より，式(10)に式(11)(15)(16)を代入して，

$$LsI(s) - Li(0) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{Q_0}{Cs} = \frac{E}{s}$$

となります。初期電流と初期電荷が無いときは

$$LsI(s) + \frac{I(s)}{Cs} = \frac{E}{s} \quad \dots(17)$$

となります。

<u>式(9)のラプラス変換</u>

式(9)の両辺をラプラス変換すると

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}Ri_2\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}E\mathrm{d}t$$

$$R\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}i_2\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}E\mathrm{d}t$$

$$\therefore RI_2(s) = \frac{E}{s} \quad \dots(18)$$

t 回路図と s 回路図を行き来できる理由

式(17)(18)を回路図にかき戻してみると図 1-4 のようになります。これを s 回路図と呼びます。

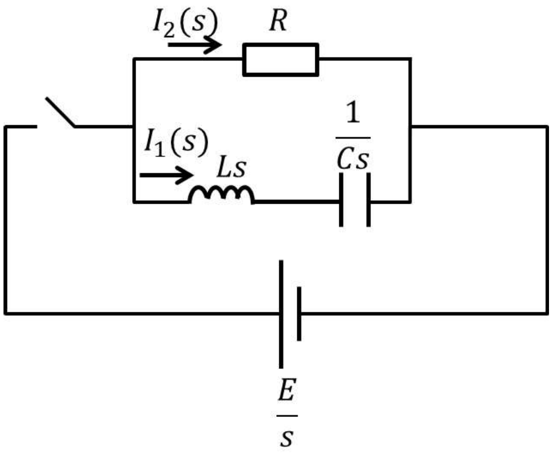


図 1-4

ということで，ここまでで，

- t 回路図から微分方程式を立てる
- 微分方程式をラプラス変換する
- ラプラス変換した式を s 回路図にかき戻す

ことをしてきました。この流れを図 1-5 の相関図で再度説明すると，①→②→⑤→④をしたことになります。

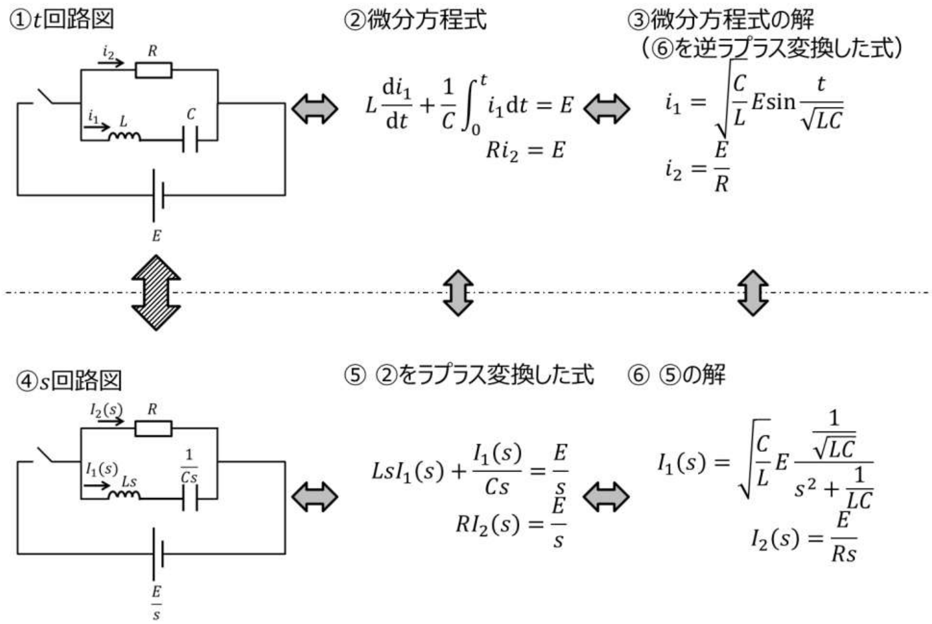


図 1-5

これらの操作は等価的に行ったり来たりすることができる数学的な操作ですので，一定の約束事を作れば，④の回路図を①から直接作ってしまっても問題がありません。本書は，それを利用して①→④→⑤→⑥→③の流れで過去問を解説しています。

> ⓘ 『一定の約束事』とは、s を使って交流回路的に s 回路図をかくことです。
> ポイントは
> 1. 交流回路のように $\mathrm{j}\omega \to s$ と置き換える。
> 2. 電源電圧を s で割る。
>
> の 2 点です。

<u>①→④→⑤→⑥→③という順番を辿るメリット</u>

①→④→⑤→⑥→③という順番を辿るメリットは大きく 2 つあります。

メリット 1 つは，回路図をかいて式を立てるという，直流回路や交流回路で何度もしてきたことに置き換えられるということです。もう 1 つは，逆ラプラス変換の公式を覚えておけば，ラプラス変換の定義通りに微積分の演算子を変換する必要がないからです。

このように，ラプラス変換を利用することで，省エネをして過渡現象の問題を解くことができるようになります。

おまけ 2：ラプラス変換と素子の初期条件

式(11)(15)は初期条件がある式となります。コイル部分とコンデンサ部分のみを s 回路図にかき戻すと，図 1-6 のようになります。電流の向きと電圧の向きにご注意下さい。式(11)(15)は， t 回路図でいう電圧降下を正としています。

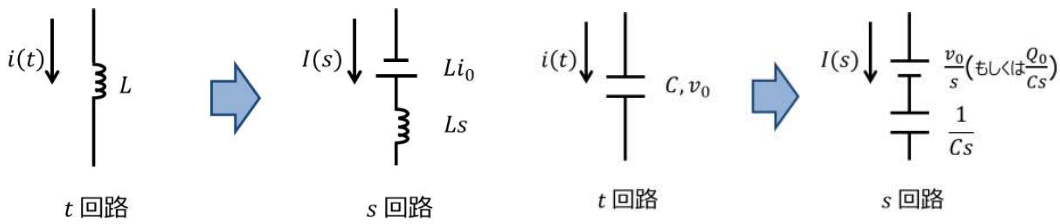


図 1-6

おまけ 3：過渡現象における簡易式

本書はラプラス変換で過渡現象を説明していますが，実はラプラス変換をしなくても，微分方程式を解かなくても過渡現象を解く方法があります。私としては電験 1 種で必須となってくるラプラス変換の解法も捨てがたいのですが，事実として簡易式の方も確かに楽ですので，ご紹介します。

なお，簡易式を用いた過去問解説は別解として記載しています。

<u>過渡現象における簡易式</u>

電流 $i(t)$ ，電圧 $v(t)$ ，電荷 $q(t)$ それぞれについて，

$$i(t) = i(\infty) + \{i(0) - i(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$v(t) = v(\infty) + \{v(0) - v(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$q(t) = q(\infty) + \{q(0) - q(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

の式が成り立ち，これらを簡易式と呼んでいます。

初期値（ $i(0)$ など）と定常値（ $i(\infty)$ など），

時定数 τ に数値や文字を代入すれば，確かにラプラス変換をせずに簡単に求めることができます。
ただし，この簡易式は $\boldsymbol{RL}$ **回路**・$\boldsymbol{RC}$ **回路**に限る話となります。$\boldsymbol{RLC}$ **回路**には適用できません。

$\boldsymbol{RL}$ 回路における導出方法

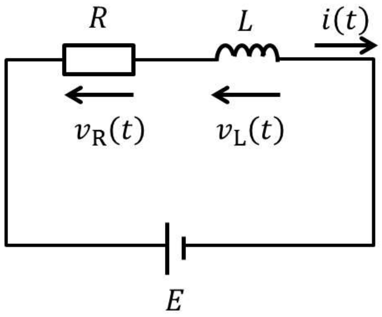


図 1-7

電流 $\boldsymbol{i(t)}$ の導出

回路全体について微分方程式を立てると，

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=E$$

となります。この形の微分方程式は，過渡解と定常解と別々に求めて，重ね合わせて一般解を求めます。

過渡解は，積分定数 C と定数 A を用いて以下のように求まります。

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=0L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-Ri(t)$$

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-Ri(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{i(t)}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$\ln i(t)=-\frac{R}{L}t+C$$

$$i(t)=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t+C}$$

$$=A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

定常解は E や R で表記することも可能ですが，簡易式の完成形を見越して $i(\infty)$ の表記のままとします。

以上より，一般解は

$$i(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+i(\infty)\quad\ldots(19)$$

となります。一般解の初期値を $i(0)$ とすると，

$$i(0)=A\mathrm{e}^{0}+i(\infty)$$

$$\therefore A=\ i(0)-\ i(\infty)$$

となります。

したがって，$\frac{L}{R}$ を時定数 τ に置き換えて，A を式(19)に代入すると，

$$i(t)=i(\infty)+\{i(0)-i(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

が求まります。

電圧 $\boldsymbol{v(t)}$ の導出

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{R}}(t)&=i(t)R\\
&=i(\infty)R+\{i(0)R-i(\infty)R\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\\
&=v_{\mathrm{R}}(\infty)+\{v_{\mathrm{R}}(0)-v_{\mathrm{R}}(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{L}}(t)&=E-v_{\mathrm{R}}(t)\\
&=\{E-v_{\mathrm{R}}(\infty)\}-\{v_{\mathrm{R}}(0)-v_{\mathrm{R}}(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\\
&=v_{\mathrm{L}}(\infty)+\{-v_{\mathrm{R}}(0)+v_{\mathrm{R}}(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\\
&=v_{\mathrm{L}}(\infty)+\{E-v_{\mathrm{R}}(0)-E+v_{\mathrm{R}}(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\\
&=v_{\mathrm{L}}(\infty)+[\{E-v_{\mathrm{R}}(0)\}\\
&\qquad-\{E-v_{\mathrm{R}}(\infty)\}]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\\
&=v_{\mathrm{L}}(\infty)+\{v_{\mathrm{L}}(0)-v_{\mathrm{L}}(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}
\end{aligned}$$

RC 回路における導出方法

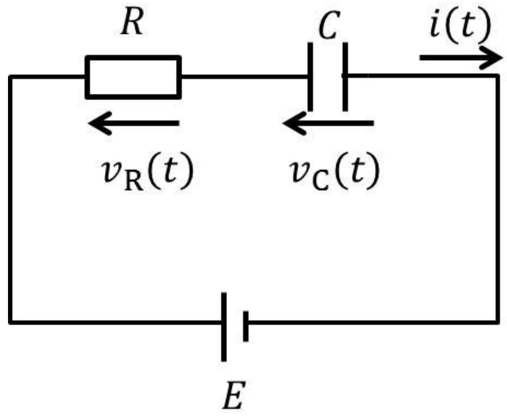


図 1-8

電流 $i(t)$ の導出

回路全体について電圧降下の式を立てると，

$$Ri(t)+v_C(t)=E \quad \ldots(20)$$

となります。

一方で，コンデンサにおける電荷 $q(t)$ は定義より

$$\int_0^t i(t)\mathrm{d}t \equiv q(t)$$
$$= Cv_C(t)$$

となり，この両辺を微分すると

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{i(t)}{C}$$

となります。これを式(20)の両辺を微分した式に代入して

$$R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{i(t)}{C}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{i(t)}=-\frac{\mathrm{d}t}{CR}$$

$$\ln i(t)=-\frac{t}{CR}+C$$

$$i(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}+C}$$
$$=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}$$

となります。

$t=0$ のとき

$$i(0)=A\mathrm{e}^0$$
$$\therefore A=i(0)$$

また， $t\to\infty$ のとき

$$i(\infty)=A\times 0=0$$
$$=0$$

以上より， CR を時定数 τ に置き換えたうえで，簡易式に揃えるように $i(t)$ を式変形をしていくと

$$i(t)=i(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=0+\{i(0)-0\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=i(\infty)+\{i(0)-i(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

が求まります。

電圧 $v(t)$ の導出

$$v_R(t)=i(t)R$$
$$=i(\infty)R+\{i(0)R-i(\infty)R\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=v_R(\infty)+\{v_R(0)-v_R(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_C(t)=E-v_R(t)$$
$$=\{E-v_R(\infty)\}-\{v_R(0)-v_R(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=v_C(\infty)+\{-v_R(0)+v_R(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=v_C(\infty)+\{E-v_R(0)-E+v_R(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=v_C(\infty)+[\{E-v_R(0)\}$$
$$-\{E-v_R(\infty)\}]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=v_C(\infty)+\{v_C(0)-v_C(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

電荷 $q(t)$ の導出

$$q(t)=Cv_C(t)$$
$$=Cv_C(\infty)+\{Cv_C(0)-Cv_C(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=q(\infty)+\{q(0)-q(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

感覚的な導出

「簡易式があるのは覚えているけどその導出の仕方を忘れてしまった」というときは，感覚的な導出で乗り切る方法もあります。ただし，これから紹介する方法は数学的に全く厳密性がないです。

まず，電流であろうと電圧であろうと電荷であろうと，式の形は全部同じということだけは飲み込みます。

$$i(t) = i(\infty) + \{i(0) - i(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$v(t) = v(\infty) + \{v(0) - v(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$q(t) = q(\infty) + \{q(0) - q(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

次に，単純な減衰関数を余白に書きます。

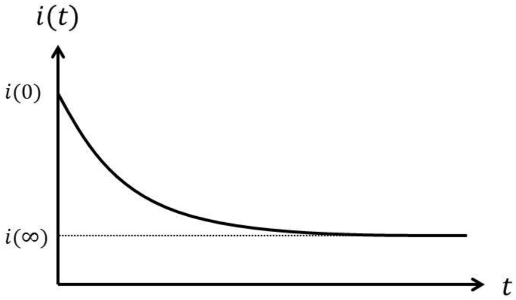


図 1-9

このグラフから $i(t)$ の簡易式を作っていきます。

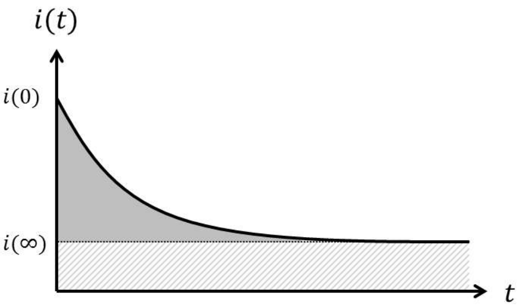


図 1-10

このようにベース部分と減衰部分に切り分けます。

ベース部分は $i(\infty)$ です。

減衰部分は自然対数の底 e で減衰していくとします。その理由は，指数関数的な挙動をする自然現象は自然対数の底で表せることが多いからです。ということで，初期量 $i(0) - i(\infty)$ が減衰していきますので，減衰部分は

$$\{i(0) - i(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

と表せます。

以上，2 つを合わせると

$$i(t) = i(\infty) + \{i(0) - i(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

となります。

ということで， $v(t)$ も $q(t)$ も同じ形の

$$v(t) = v(\infty) + \{v(0) - v(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$q(t) = q(\infty) + \{q(0) - q(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

となります。

実際の使用例

$\boldsymbol{RL}$ 回路

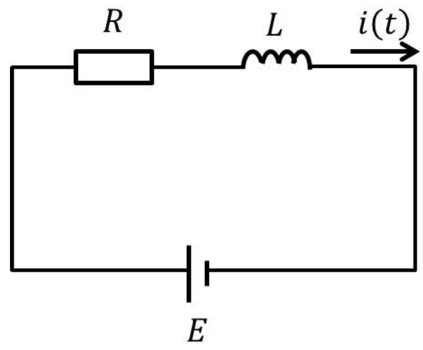


図 1-11

コイルの特性から

$$i(0) = 0,\ i(\infty) = \frac{E}{R}$$

となりますので，簡易式に代入して

$$\begin{aligned} i(t) &= i(\infty) + \{i(0) - i(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{E}{R} + \left(0 - \frac{E}{R}\right)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \\ &= \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) \end{aligned}$$

となります。

RC 回路

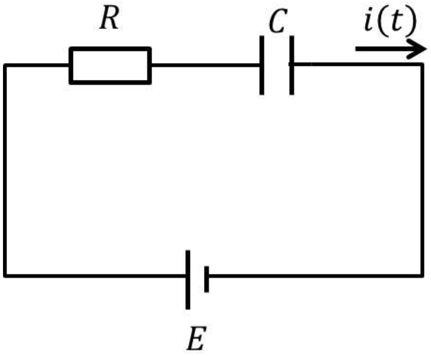


図 1-12

コンデンサの特性から

$$i(0) = \frac{E}{R},\ i(\infty) = 0$$

となりますので，簡易式に代入して

$$\begin{aligned} i(t) &= i(\infty) + \{i(0) - i(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 0 + \left(\frac{E}{R} - 0\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}} \\ &= \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}} \end{aligned}$$

となります。

過去問の分類表

過去問には様々なパターンの回路図があります。1 週目は頭から解いても構いませんが，あとでざっと復習したいときに使えるような分類表をご用意しました。

なお，レベルというのは 3 段階に分けていまして，それぞれ以下のような基準としています。

レベル 1：公式の当てはめ

レベル 2：少し頭を捻る

レベル 3：頭を捻り，計算量が多い

	電源		回路			初期条件		レベル
	定電圧	定電流	*RL*	*RC*	*RLC*	0	0以外	
1995年	✓		✓			✓		1
1996年	✓			✓		✓		1
1997年	✓				✓	✓		2
1999年	✓			✓		✓		1
2000年	✓			✓			✓	2
2002年	✓		✓			✓		2
2003年		✓		✓			✓	2
2004年	✓				✓	✓		3
2005年	✓				✓		✓	2
2006年	✓			✓			✓	1
2007年	✓			✓			✓	1
2008年		✓		✓			✓	2
2009年	✓	✓		✓		✓		1
2010年	✓			✓			✓	2
2011年		✓	✓			✓		1
2012年	✓				✓	✓		-
2013年	✓			✓			✓	3
2014年	✓				✓		✓	2
2015年		✓	✓				✓	3
2016年				✓			✓	1
2017年	✓		✓			✓		1
2018年	✓			✓		✓		1
2019年	✓			✓			✓	2
2020年	✓			✓		✓		1
2021年	✓				✓		✓	-
2022年	✓		✓				✓	2
2023年	✓		✓				✓	2
2024年		✓		✓		✓		-

1995年

問題

次の文章は，過渡現象についての記述である。次の $\boxed{\quad}$ 中に当てはまる語句，記号又は式を解答群から選び，マークシートに記入しなさい。

図のような抵抗 $R[\Omega]$，インダクタンス $L[\mathrm{H}]$ の直列回路において，スイッチ SW を閉じ，電圧 $E[\mathrm{V}]$ を加えた瞬時から時間 $t[s]$ 後の電流を $i[\mathrm{A}]$ とすると，

$$Ri + \boxed{（1）} = E$$

この微分方程式を解くと

$$i = \boxed{（2）}\left(1 - \boxed{（3）}\right)$$ となる。

ここで，T は $\boxed{（4）}$ といわれ，その値は $\boxed{（5）}$ である。

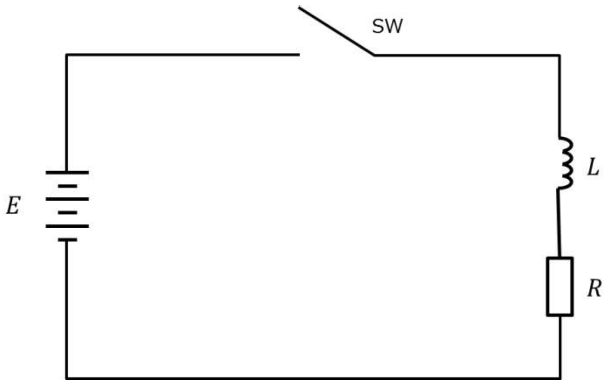


図2－1

［解答群］

(イ)$\mathrm{e}^{-\frac{L}{R}t}$　(ロ)$\frac{R}{L}$　(ハ)$\frac{E}{R}$　(ニ)Li　(ホ)時定数　(ヘ)$\int_0^t Li\mathrm{d}t$　(ト)e^{-Tt}　(チ)積分定数

(リ)$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$　(ヌ)$\omega L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$　(ル)$\frac{L}{R}$　(ヲ)$\mathrm{e}^{-\frac{1}{T}t}$　(ワ)$\frac{E}{L}$　(カ)積分定数　(ヨ)$\mathrm{e}^{\frac{1}{T}t}$

【正答チェック表】

日にち	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

【解答】

(1)解答：リ

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

(2)解答：ハ

(3)解答：ヲ

(4)解答：ホ

(5)解答：ル

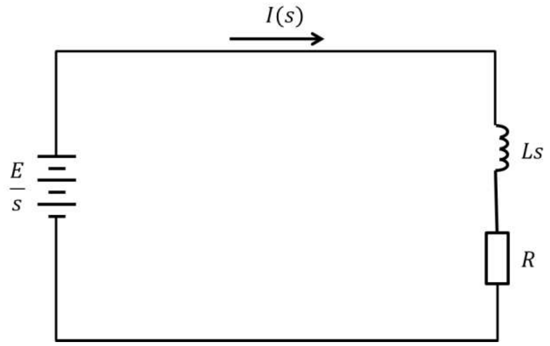


図 2-2

t 回路の図 2-1 を s 回路にプラス変換した図 2-2 について，

$$\frac{E}{s}=(Ls+R)I(s)$$

$$I(s)=\frac{E}{s(Ls+R)}$$

$$=\frac{E}{L}\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}$$

$$=\frac{E}{L}\times\frac{L}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

$$=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)\dots①$$

時定数を T とすると， $T=\frac{L}{R}$ であり，①式は

$$①=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{T}t}\right)$$

となる。

【別解】コイルの特性より

$$i(0)=0,i(\infty)=\frac{E}{R}$$

よって，

$$i(t)=i(\infty)+\{i(0)-i(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

$$=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

$$=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1\text{-}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{T}}\mathrm{t}}\right)$$

1996年

問題

次の文章は，RC回路に関する記述である。次の $\boxed{}$ 中に当てはまる語句，記号又は式を解答群から選び，マークシートに記入しなさい。

図に示すように，直流電圧 E[V] をスイッチ S で，RC 直列回路に印加する。ただし，コンデンサCの初期電荷は零とする。

a.スイッチ S を投入したときを $t=0$ とするとき，コンデンサ C に蓄えられる電荷の t 秒後の値は，

$q(t)=\boxed{(1)}\left(1-\mathrm{e}^{\boxed{(2)}}\right)$[C] である。

b.そのとき，回路に流れる電流 $i(t)$ は $i(t)=\boxed{(3)}$[A] である。

c.直流電流から回路に供給される全エネルギー W_{E} は $W_{\mathrm{E}}=\boxed{(4)}$[J] である。

d.抵抗 $R[\Omega]$ で消費される全エネルギー W_{R} は $W_{\mathrm{R}}=\boxed{(5)}$[J] である。

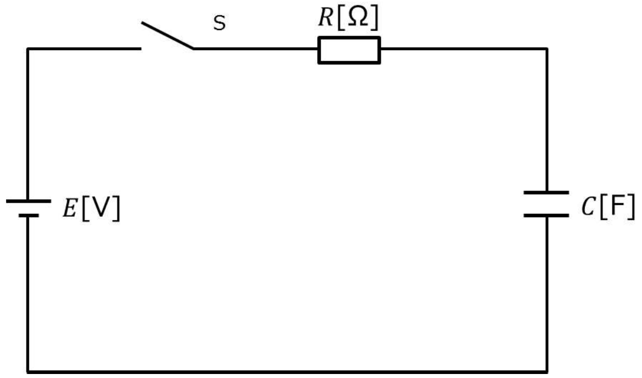


図 3－1

［解答群］

(イ)$\dfrac{E^2}{C}$　(ロ)$\dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}$　(ハ)E　(ニ)CR　(ホ)$-\dfrac{t}{CE}$　(ヘ)$\dfrac{E^2}{R}$　(ト)$-\dfrac{t}{CR}$　(チ)CE^2

(リ)$\dfrac{E}{R}$　(ヌ)RE　(ル)CE　(ヲ)$\dfrac{1}{2}CE^2$　(ワ)$\dfrac{C}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}$　(カ)$\dfrac{E^2}{2R}$　(ヨ)$\dfrac{R}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}$

【正答チェック表】

日にち	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

【解答】

(1)解答：ル

(2)解答：ト

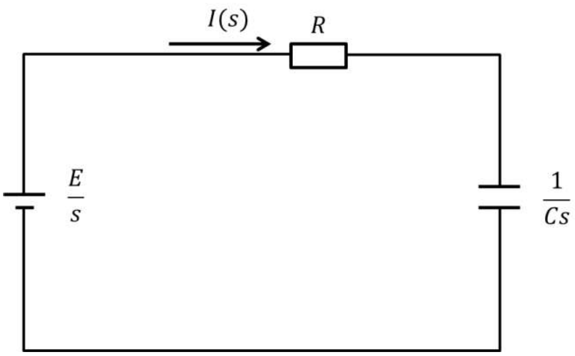


図 3-2

図 3-2 より

$$\frac{E}{s}=\left(R+\frac{1}{Cs}\right)I(s)$$

$$I(s)=\frac{E}{s\left(R+\frac{1}{Cs}\right)}$$

$$=\frac{E}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\quad\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\quad\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}\quad\ldots①$$

よって，

$$q(t)=\int_0^t i(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{R}(-RC)\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}\right]_0^t$$

$$=CE\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

【別解】コンデンサの特性より

$$q(0)=0,q(\infty)=CE$$

よって，

$$q(t)=q(\infty)+\{q(0)-q(\infty)\}\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}$$
$$=CE-CE\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}$$
$$=CE\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

(3)解答：ロ

①より

$$i(t)=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}$$

(4)解答：チ

$$W_{\mathrm{E}}=\int_0^\infty Ei(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E^2}{R}(-RC)\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}\right]_0^\infty$$

$$=CE^2$$

(5)解答：ヲ

$$W_{\mathrm{R}}=\int_0^\infty Ri^2(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty R\left(\frac{E}{R}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{2t}{CR}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)\left[\mathrm{e}^{-\frac{2t}{CR}}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}CE^2$$

関連書籍のご紹介

電子書籍版 過去問徹底解説シリーズ

電験３種から１種まで幅広く試験に対応しています。

収録問題	収録年数	販売予定日
電験３種 全科目	令和６年上期～平成 20 年の 19 回分	販売中
電験３種 理論科目	令和６年上期～平成 20 年の 19 回分	販売中
電験３種 電力科目	令和６年上期～平成 20 年の 19 回分	販売中
電験３種 機械科目	令和６年上期～平成 20 年の 19 回分	販売中
電験３種 法規科目	令和６年上期～平成 20 年の 19 回分	販売中
電験２種一次試験 全科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験２種一次試験 理論科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験２種一次試験 電力科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験２種一次試験 機械科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験２種一次試験 法規科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験２種二次試験 全科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験１種一次試験 全科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験１種一次試験 理論科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験１種一次試験 電力科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験１種一次試験 機械科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験１種一次試験 法規科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中
電験１種二次試験 全科目	令和６年～平成 21 年の 16 年分	販売中

※すべて 著者：電験王，編者：山岸 健太

電子書籍版は STORES（https://denken-ou-tanaoroshi.com）で PDF として購入可能です。お持ちのプリンタで学習したい年や科目を低コストで印刷でき，紙での学習が可能です。また，STORES 版は低価格なので，既にお持ちの過去問題集との解答比較にもお使いいただけます。

電験２種 過渡現象をラプラス変換で解く 30 年間 2025 年版

2025 年 4 月 18 日 第 1 版

著 者：山岸健太
ブログ：電験１種の棚卸し
URL：https://den1-tanaoroshi.com/
e-mail：info@den1-tanaoroshi.com

■ 正誤のお問い合わせにつきましては上記 e-mail アドレスにお知らせ下さい。内容を確認次第ホームページに正誤表を掲載させていただきます。